Fourier 级数

徐瑞云

目　录

I. 通　　论

1.1 三角级数　　级数

$$\frac{1}{2}A_0(\theta)+\sum_1^\infty A_n(\theta) \tag{1.1.1}$$

称为三角级数，其中

(1.1.2)　$A_0(\theta)=a_0,\ A_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\quad(n>0)$.

我们记此级数为 $T(\theta)$ 或简记为 T.

$T(\theta)$ 的 n 阶部分和是

$$s_n(\theta)=\frac{1}{2}A_0(\theta)+\sum_1^n A_m(\theta). \tag{1.1.3}$$

系数 $a_n(n\geqslant 0)$ 及 $b_n(n\geqslant 1)$ 是给定的． 对于其它整数 n，我们定义 a_n，b_n 如下：

(1.1.4)　$a_{-n}=a_n(n>0),\ b_0=0,\ b_{-n}=-b_n\quad(n>0)$,

又定义 c_n 为

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n); \tag{1.1.5}$$

那末

$$a_n=c_n+c_{-n},\quad b_n=i(c_n-c_{-n}). \tag{1.1.6}$$

反过来，假如先给定 c_n，那末可由 (1.1.6) 来定义 a_n 和 b_n． 于是

$$\begin{aligned}s_n(\theta)&=c_0+\sum_1^n\{(c_m+c_{-m})\cos m\theta+i(c_m-c_{-m})\sin m\theta\}\\&=\sum_{-n}^n c_m e^{mi\theta}.\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

因而我们也可以将 $T(\theta)$ 定义为

$$\sum_{-\infty}^\infty C_n(\theta)=\sum_{-\infty}^\infty c_n e^{ni\theta}, \tag{1.1.8}$$

而以 (1.1.7) 表示 $s_n(\theta)$.

我们称 (1.1.1) 为实的三角级数而 (1.1.7) 为复的三角级数. 这是根据出现于级数中的是三角函数还是指数函数而定的. 在 (1.1.2) 中的系数 a_n 和 b_n 可以是复数; 但是为了研究方便起见, 不妨假定都是实数, 因为我们可以把 $T(\theta)$ 的实部和虚部分开来加以研究. 值得注意的是: 级数(1.1.1)和(1.1.8)只是形式上加以定义, 并不隐含着对于一切 θ 或任何 θ 的收敛性. 但(1.1.8)应该看作是 (1.1.7) 的极限形式, 就是说, 由 (1.1.7) 向正负两个方向"相等地延伸"而成的级数.

在最简单的情形下, 级数有和函数 $f(\theta)$, 而且系数可以由 $f(\theta)$ 简单地表达出来. 例如, 假设级数是一致收敛的, 那末乘以 $\cos m\theta$ 和 $\sin m\theta$, 或者在复的情形下乘以 $e^{-mi\theta}$, 然后在 $(-\pi, \pi)$ 上分项积分, 利用熟知的公式

$$(1.1.9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta\, d\theta = \begin{cases} 0\,(m\neq n), \\ \pi\,(m=n\neq 0), \\ 2\pi\,(m=n=0), \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta\, d\theta = \begin{cases} 0\,(m\neq n), \\ \pi\,(m=n\neq 0), \\ 0\,(m=n=0), \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \sin n\theta\, d\theta = 0, \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{(n-m)i\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0\,(m\neq n), \\ 2\pi\,(m=n), \end{cases} \end{cases}$$

再用 n 代替 m, 即得

$$(1.1.10)\quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta,\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta, \\ c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ni\theta}\, d\theta. \end{cases}$$

当 f 是实函数时, a_n 和 b_n 是实数, c_n 和 c_{-n} 是共轭的. 当 f 为偶函数时, $b_n=0$ 而

(1.1.11) $$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\cos n\theta\,d\theta.$$

当 f 为奇函数时，$a_n=0$ 而 b_n 可类似地推得.

1.2 三角级数与调和函数 在一开始就指出三角级数理论与调和函数及解析函数一般理论之间的形式上联系是有益的，从某种意义来说，前者是后者的一部分. 以后认定 $z=x+iy=re^{i\theta}$ 是一复变数而 $\bar{z}=x-iy=re^{-i\theta}$ 为其共轭数. 为明确起见，我们假定 a_n 和 b_n 为实数（从而 c_n 和 c_{-n} 为共轭）. 我们并且假定 a_n 和 b_n 为有界（以后所遇到的往往是这种情形），于是下述关于 r 的幂级数对 $r<1$ 收敛，又对固定的 r，关于 θ 一致收敛.

设

(1.2.1) $$u(r,\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n r^{|n|}e^{ni\theta}=c_0+\sum_1^\infty c_n r^n e^{ni\theta}+\sum_1^\infty c_{-n}r^n e^{-ni\theta},$$

则 u 为一调和函数，亦即方程

(1.2.2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

中任何一个的解. 它对 $r<1$ 是正则的实函数. 我们也可写成

(1.2.3) $$u(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty A_n(\theta)r^n,$$

而 $T(\theta)$ 就是在 u 的任一表达式中用 $r=1$ 代入的结果. 现在

(1.2.4) $$u(r,\theta)=\frac{1}{2}\{F(z)+\overline{F(z)}\},$$

其中

(1.2.5) $$F(z)=c_0+2\sum_1^\infty c_n z^n.$$

于是 u 是 $F(z)$ 的实部. 假如写着

(1.2.6) $$B_n(\theta)=b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta,$$

则

(1.2.7) $$F(z)=u(r,\theta)-iv(r,\theta),$$

其中

$$(1.2.8) \qquad v(r,\ \theta)=\sum_{1}^{\infty}B_n(\theta)r^n.$$

我们称 u 和 v 是共轭的调和函数，而在(1.2.8)中用 $r=1$ 代入所得的级数

$$(1.2.9) \qquad \widetilde{T}(\theta)=\sum_{1}^{\infty}B_n(\theta)$$

称为 $T(\theta)$ 的共轭级数.

为方便起见，我们在这里证明两个在第三章需用的公式. 设 $C_0=c_0$, $C_n=2c_n(n>0)$，于是 $F(z)=\sum C_n z^n$，且 $r<1$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u-iv)e^{-ni\theta}d\theta=C_n r^n(n\geqslant 0),\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u-iv)e^{ni\theta}d\theta=0\quad(n>0).$$

因此(结合第一式和第二式的共轭形式)得到：对 $n>0$，

$$(1.2.10) \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u\,d\theta=\mathrm{R}(C_0),\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ue^{-ni\theta}\,d\theta=\frac{1}{i\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ve^{-ni\theta}\,d\theta=C_n r^n.$$

实际上，这里的 C_0 为实数.

1.3 Fourier 三角级数

公式(1.1.10)的证明依赖于 $T(\theta)$ 一致收敛的假设. 这个假设很强，非经特殊选择的三角级数未必满足. 这些公式本身提示我们应从完全不同的观点出发来研究级数.

我们从区间$(-\pi,\ \pi)$上的(Lebesgue 意义下)可积(实的或复的)函数 $f(\theta)$ 出发. 为方便起见，我们对一切实数 θ，定义 $f(\theta)$ 为一周期等于 2π 的函数，于是只要 $f(\theta)$ 对 θ 的一个值有定义，就有 $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$，特别 $f(\pi)=f(-\pi)$.

现在我们用(1.1.10)来定义 a_n, b_n 和 c_n，而称 a_n, b_n 为 $f(\theta)$ 的“实的”Fourier 常数，c_n 为“复的”Fourier 常数，而(1.1.1)或(1.1.8)为 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数. 我们用 $f\sim(a_n,\ b_n)$ 或

$$(1.3.1) \qquad f(\theta)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

来表示 a_n, b_n 为 f 的 Fourier 常数，(1.1.1) 为其 Fourier 级数. 类似地写着 $f\sim(c_n)$ 或者 $f(\theta)\sim\sum c_n e^{ni\theta}$, 而称 (1.1.1) 为 $f(\theta)$ 的"实的" Fourier 级数, (1.1.8) 为"复的" Fourier 级数. 有时也将 f 的 Fourier 级数写成 $T(f)$, 而将其共轭级数写成 $\widetilde{T}(f)$.

因为(1.1.10)中的所有函数都是周期函数，我们可以将积分区间改为任意的 $(\xi, \xi+2\pi)$. 特别，时常宁可用 $(0, 2\pi)$ 来代替 $(-\pi, \pi)$ 作为基本区间.

当一个三角级数的系数 a_n, b_n 或 c_n 可以用公式 (1.1.10) 表示时，也就是说，当某一组积分方程有解时，这个三角级数才称为 Fourier 级数. 容易明白，上面的叙述是依赖于所采用的积分定义的. 我们这里所采用的是 Lebesgue 积分，积分定义的任何限制或扩张都将导致 Fourier 级数类的相应改变.

例如将看到，级数

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots, \tag{1.3.2}$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\log 2}+\frac{\sin 3\theta}{\log 3}+\cdots \tag{1.3.3}$$

就不是在我们意义下的 Fourier 级数；但上述级数的系数，只要对积分概念作适当的推广，就能用 Fourier 公式来表示. (1.3.2) 的系数能用 Stieltjes 积分表示成

$$\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, n\theta\, d\phi(\theta),$$

其中 $\phi(\theta)$ 对 $\theta<0$, $\theta=0$, $\theta>0$ 分别为 $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$. 级数(1.3.3)的系数可用(1.1.10)的形式来表示，但这里 $f(\theta)$ 为级数的和而对 a_n (等于 0) 的积分乃是 Cauchy 意义下的"主值".

一个三角级数可能收敛或不收敛，又可能是或不是一个 Fourier 级数；但这两种性质之间没有显然的联系(虽然一些简单的级数可能兼有此二性质). 级数(1.3.3)对一切 θ 收敛，但它不是一个 Fourier 级数；另一方面，存在着对任何 θ 都不收敛的 Fourier 级数. 甚至这样的事情也并不清楚：当一个三角级数是

收敛的并且是 Fourier 级数时，它是否就是它的和的 Fourier 级数.

三角级数是一类特殊的直交级数；三角级数理论中有不少部分可以看作一般直交级数理论中的一部分，在第二章中我们就要用这种观点来研究它．但是作为开始必须将实变函数论的某些部分给以简单的叙述，我们假定读者对这些是已知的.

1.4 测度和积分 我们认为读者已知 Lebesgue 的测度和积分的基本理论．用 $L(a, b)$ 或 L 表示在 Lebesgue 意义下在 (a, b) 上可积的函数 $f(x)$ 的全体．积分区间总是有限的．“f 属于 L”有时也说成“f 是 L”的．对于函数 $f(x)\geqslant 0$，只要它是可测的，就认为其积分值已确定，积分值为有限或无限视 f 属于 L 或 f 不属于 L 而定.

称测度为零的集为零集：零集在积分论中是可以忽视的．若 f 和 g 只在一零集上不相等，我们称它们是对等的而写作 $f\equiv g$．这时，我们也说对于几乎所有的 x 或几乎处处成立着 $f=g$．若 $f\equiv 0$，我们称 f 为零函数．集 E 的测度记作 mE.

除 L 以外，有时也用字母表示其它的函数类；特别用 B, C; C_k 和 V 分别表示有界函数类，连续函数类，具有 k 阶连续导数的函数类以及有界变差函数类*).

我们允许引用古典的关于积分和微分的定理，主要指分部积分，代换定理，第一和第二中值定理，以及两个最著名的关于在积分号下取极限的定理，即是：(i) 假如几乎处处成立着 $f_n(x)\to f(x)$ 并且 $|f_n(x)|\leqslant\phi(x)$，而 $\phi(x)$ 为 L 可积且不依赖于 n，则

$$\int f_n(x)dx \to \int f(x)dx; \tag{1.4.1}$$

(ii) 若 $f_n(x)$ 对于一切 x 或几乎所有 x 关于 n 递增，又假定

*) 一个复值函数当它的实部和虚部都是有界变差时称为有界变差的函数.

$\int f_n(x)dx \neq -\infty$，则上述结论也是真的．对情形(i)，我们称$f_n(x)$控制收敛于$f(x)$．特别当$f_n(x)\to f(x)$对一切$x$成立且$|f_n(x)|\leqslant H$时，(i)中的条件当然满足，此时我们称$f_n(x)$有界收敛于$f(x)$．对情形(ii)，几乎处处存在的极限函数$f(x)$被理解为可能对某些$x$是无限的，因此$\int f(x)dx$也可以是无限的，此时(1.4.1)右端的积分改写为∞．最后，在(1.4.1)中的积分，积分范围可以取为整个区间(a, b)，或者含在(a, b)中的任一可测集．对(i)，我们添加一个有用的"Fatou 引理"：若$f_n(x)\geqslant 0$且几乎处处成立着$f_n(x)\to f(x)$，则

$$\int f(x)dx \leqslant \underline{\lim} \int f_n(x)dx.$$

我们需要用到有关积分交换的 Fubini 定理，即当$f(x, y)$可积时，成立着

$$\int dx \int f\,dy = \int dy \int f\,dx = \iint f\,dx\,dy.$$

当$f\geqslant 0$时积分值可能是无限．

有时我们也要用到连续函数关于V中函数的 Stieltjes 积分，这种积分的分部积分法和下面的定理：设M为$|f|$的最大值，V为ϕ的全变差，则$\left|\int f\,d\phi\right| \leqslant MV$．在第六章中我们用到 Egoroff 定理的两种形式：(i)若在E中几乎处处成立着$f_n(x)\to f(x)$，则存在一个E^*使得$E^*\subset E$但$mE^* > mE-\varepsilon$，而在E^*上一致地成立着$f_n(x)\to f(x)$；(ii)假如每一$f_h(x)$在E上连续，如果当$h\to 0$时在E上几乎处处成立着$f_h(x)\to f(x)$，那末类似于上述的结论仍成立．

1.5 L^p 类 若f为可测函数且$|f|^p$属于L，则称f属于L^p．我们以后常假设$p\geqslant 1$．当$p=1$时L^p即为L．若f属于L^q

而 $1\leqslant p<q$，则 f 属于 L^p.

我们记

$$(1.5.1)\qquad \begin{cases} \mathrm{N}_p(f)=\|f\|_p=\left(\int_a^b|f|^p dx\right)^{1/p}, \\ \mathrm{M}_p(f)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b|f|^p dx\right)^{1/p}. \end{cases}$$

假如 f 不属于 L^p，则 $\mathrm{N}_p(f)$ 和 $\mathrm{M}_p(f)$ 为无穷大. 称 $\mathrm{N}_p(f)$ 和 $\mathrm{M}_p(f)$ 分别为 f 对区间 (a, b) 及指数 p 的范数和平均值. 它们只相差一个因子 $(b-a)^{1/p}$；但这个差别是重要的.

若 $p>1$，用

$$(1.5.2)\qquad p'=\frac{p}{p-1},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

来定义 p'，则 $p'>1$；若 $p<2$，则 $p'>2$. 称 p 和 p' 为共轭指数，L^p 和 $L^{p'}$ 为共轭类. L^2 类是自共轭的. 若 $p=1$，则 p' 认为 ∞，反之亦然. 我们马上将定义与 L 共轭的函数类 L^∞.

平均值 $\mathrm{M}_p(f)$ 有三个基本性质. 第一是 Hölder 不等式

$$(1.5.3)\qquad \mathrm{M}_1(fg)\leqslant \mathrm{M}_p(f)\mathrm{M}_{p'}(g),$$

(当 $p=2$ 时称为 Schwarz 不等式). 第二是 Minkowski 不等式

$$(1.5.4)\qquad \mathrm{M}_p(f+g)\leqslant \mathrm{M}_p(f)+\mathrm{M}_p(g).$$

第三是

$$(1.5.5)\qquad \mathrm{M}_q(f)\leqslant \mathrm{M}_p(f)\quad (q<p),$$

它说明对给定的 f，$\mathrm{M}_p(f)$ 是 p 的递增函数. 范数 $\mathrm{N}_p(f)$ 具有前二性质但不具有第三个性质.

当 $p\to\infty$ 时，

$$(1.5.6)\qquad \mathrm{N}_p(f)\to \mathrm{Max}|f|,\ \mathrm{M}_p(f)\to \mathrm{Max}|f|,$$

这里 $\mathrm{Max}|f|$ 是 $|f|$ 的“本质上界”，它就是使得 $|f|\leqslant\eta$ 几乎处处成立的最小值 η. 因此自然定义 L^∞ 为使 $\mathrm{Max}|f|$ 是有限的函数类. 这就是“本质有界”函数类或对等于有界函数的函数类. 我们可写成

(1.5.7) $$\mathrm{N}_\infty(f)=\mathrm{M}_\infty(f)=\mathrm{Max}|f|;$$

容易验证(1.5.3)到(1.5.5)当 p 或 p' 为无限时依然成立.

1.6 L^p 空间及其度量 关于 L^p 类以及与它们有关的不等式的理论可用几何的术语更好地说明. L^p 类定义了一个函数空间,每一函数定义为空间的一个点. 对于两个相互对等的函数我们将不加以区别,因此每一个点代表一族对等的函数. 特别,原点代表一族零函数. 空间 L^2 有特殊的重要性, 称之为 Hilbert 空间. 在 L^p 中我们定义 f 和 g 的距离为

(1.6.1) $$\delta_p(f,\ g)=\mathrm{N}_p(f-g),$$

当无须阐明所涉及的是哪一空间时可省去下标 p 而写作 $\delta(f,\ g)=\mathrm{N}(f-g)$. 特别, $\mathrm{N}(f)$ 是 f 与原点之间的距离. 若 $p=\infty$,则

(1.6.2) $$\delta(f,\ g)=\mathrm{Max}|f-g|.$$

我们也可以用同样的方法定义一切连续函数所成的空间 C, 仍用(1.6.2)定义距离,现在这里"Max"乃是原来意义下的最大值.

假如在(1.5.4)中取 $f=f_1-f_2$, $g=f_2-f_3$, 它就变为

(1.6.3) $$\delta(f_1,\ f_3)\leqslant\delta(f_1,\ f_2)+\delta(f_2,\ f_3),$$

这公式是三角形一边不大于其它二边之和的定理的拓广.

现在我们可以建立空间 L^p (或 C) 中的度量,并且将一般点集论的概念移用于此. 某一函数类在更广的函数类中的稠密性的概念是对我们特殊重要的一个概念. 设 S_1 是 L^p 的一个子集,而 S_2 是 S_1 的子集. 若给定 S_1 中任意的 ϕ 及任意正数 ε, 在 S_2 中存在 ψ 使 $\delta_p(\phi,\ \psi)<\varepsilon$, 则称 S_2 在 S_1 中关于 L^p 是稠密的(或简称 S_2 在 S_1 中稠密). 从(1.6.3)立即得到稠密性的关系是可以传递的: 设 S_2 在 S_1 中稠密, S_3 在 S_2 中稠密, 则 S_3 在 S_1 中稠密. 在这种叙述下,自然已预先确定了一个固定的度量.

从(1.5.5)亦可推得: 若 S_2 在 S_1 中关于 L^p 稠密, 又 $1\leqslant q<p$,

则 S_2 在 S_1 中关于 L^q 稠密*)

一个关于稠密性的命题,由于以后常常被用到,所以我们写成下面的定理.

定理 1. 假如 $1\leqslant p<\infty$, 则 $L^q\ (q>p)$, L^∞, B, C 和 C_k 都在 L^p 中稠密.

若对一切函数加以周期性的限制, 则定理仍旧正确. 以后将证明一切代数多项式所成之类在 L^p 中稠密,又一切三角多项式所成之类在 L^p 的周期函数类中稠密.

1.7 L^p 中的收敛(强收敛) 假如 f_n 和 f 都属于 L^p, 又当 $n\to\infty$ 时.

(1.7.1) $$\delta_p(f_n, f)\to 0,$$

或(事实上是一件事情) $N_p(f_n-f)\to 0$, 则称 $f_n(L^p)$ 趋向于 f, 写作

(1.7.2) $$f_n\to f\,(L^p).$$

我们也称 f_n 以指数 p 强收敛于 f (不会混淆时指数可省掉). 当 $p=\infty$ 时, $\delta(f_n, f)=\mathrm{Max}\,|f_n-f|$, 而强收敛就是"几乎处处一致收敛": $f_n\to f\,(L^\infty)$, 就是 $f_n\equiv f_n^*$ 而 f_n^* 一致收敛于 f.

强极限是"本质上唯一的": 即若 $f_n\to f\,(L^p)$, 又 $f_n\to g\,(L^p)$, 则 $f\equiv g$.

若 $f_n\to f\,(L^p)$ 及 $1\leqslant q<p$, 则 $f_n\to f\,(L^q)$.

若 $f_n\to f\,(L^p)$, 则 $N_p(f_n)\to N_p(f)$.

若 $f_n\to f\,(L^p)$ 及 $g_n\to g\,(L^{p'})$, 则 $f_ng_n\to fg\,(L)$, 且

(1.7.3) $$\int f_ng_n\,dx\to\int fg\,dx.$$

特别,当 g 属于 $L^{p'}$ 而对一切 n 有 $g_n=g$ 时,上式成立.

---

*) 不等式 $N_q(\phi-\psi)\leqslant N_p(\phi-\psi)$ 是不成立的,但是(由于 ε 的任意性)在 (1.5.5) 中 $b-a$ 的幂并不影响结论的正确性。

如果几乎处处成立着 $f_n \to f$, $|f_n| \leqslant \phi$, 其中 ϕ 属于 L^p 且与 n 无关, 又 $1 \leqslant p < \infty$, 则 $f_n \to f(L^p)$.

关于强收敛的基本定理是

定理 2. 要使 f_n 以指数 p 强收敛于 L^p 中的函数 f, 其必要充分条件是: 当 m 和 n 趋向无穷时*),

$$\int |f_m - f_n|^p dx \to 0.$$

从而存在着一个子列 (n_k), 使得对于几乎一切 x, $f_{n_k} \to f$.

这个定理 2 是和通常极限的 Cauchy 定理相似的. $p=\infty$ 时, 就是(除了一个零集不计外)有关一致收敛的相应定理. 强收敛并不包含几乎处处收敛(或者对于任何 x), 几乎处处收敛也并不包含强收敛. 但由定理 2 推得: 若 $f_n \to f(L^p)$ 及几乎处处成立着 $f_n \to f^*$, 则 $f = f^*$.

最后, 有一个定理是我们经常要用到的.

定理 3. 若 $1 \leqslant p < \infty$ 和 f 属于 L^p, 则当 $h \to 0$ 时,

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^p dx \to 0,$$

即 $f(x+h) \to f(x)\,(L^p)$.

这个积分包含着 x 在 (a, b) 外的 f 的值. 我们可以设想这些值为 0 或者将 $f(x)$ 设想为周期函数, 其周期为 $b-a$.

1.8 两个周期函数的折合 设 f 和 g 是两个周期为 $b-a$ 的函数, 称

$$r(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x-y)\,g(y)\,dy \tag{1.8.1}$$

为 f 和 g 在 (a, b) 上的折合. 这个折合也是周期为 $b-a$ 的函数, 并且关于 f, g 是对称的. $r(x)$ 具有如下的基本性质.

定理 4. 若 f 和 g 属于 L, 则 r 也属于 L (因此对几乎一切

*) 这就是说: 对每一正数 ε, 当 $m \geqslant M(\varepsilon)$, $n \geqslant N(\varepsilon)$ 时成立着 $\int |f_m - f_n|^p dx < \varepsilon$.

x 为有限). 并且有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b r\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx\,\frac{1}{b-a}\int_a^b g\,dx \tag{1.8.2}$$

和

$$\mathrm{M}_1(r)\leqslant \mathrm{M}_1(f)\mathrm{M}_1(g). \tag{1.8.3}$$ ●

因为 $f(x-y)$ 为 (x, y) 的可测函数, 从而 $f(x-y)g(y)$ 也是 (x, y) 的可测函数, 基于 Fubini 定理,

$$\int_a^b dx\int_a^b f(x-y)g(y)\,dy=\int_a^b g(y)\,dy\int_a^b f(x-y)\,dx$$
$$=\int_a^b g(y)\,dy\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b dx\left|\int_a^b f(x-y)g(y)\,dy\right|\leqslant\int_a^b |g(y)|\,dy\int_a^b |f(x-y)|\,dx$$
$$=\int_a^b |g(y)|\,dy\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

定理 5. 若 f 属于 L^p, g 属于 $L^{p'}$, 则 r 是连续函数.

因为 r 关于 f 和 g 是对称的, 我们可以假设 $p<\infty$. 因此

$$|r(x+h)-r(x)|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \{f(x+h-y)-f(x-y)\}g(y)\,dy\right|$$
$$\leqslant \mathrm{M}_p\{f(x+h)-f(x)\}\mathrm{M}_{p'}(g);$$

其中第一个因子由定理 3 知道趋向于 0.

1.9 L^2 中的直交系 在应用 §§1.5~1.8 的思想时, p 通常取作 1, 2 或 ∞ (虽然我们在论证定理时都是对一般的 p 而言的, 但对一般的 p 并不引起什么具体的麻烦). 在本节中, 假设函数 ϕ_n 属于 L^2 这一点是本质的.

设 (ϕ_n) $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 是 $L^2(a, b)$ 中的非零函数系. 当 $m\neq n$ 时若

$$(\phi_m, \phi_n)=\int_a^b \phi_m\bar{\phi}_n\,dx=0, \tag{1.9.1}$$

我们称(ϕ_n)是(a, b)上的一个直交系．若对每一n尚有

$$(1.9.2)\qquad (\phi_n, \phi_n)=\int_a^b |\phi_n|^2 dx=\|\phi_n\|_2^2=1,$$

则称(ϕ_n)是(a, b)上的一个就范直交系．

若f也属于L^2，而

$$(1.9.3)\qquad c_n=\frac{1}{\|\phi_n\|^2}\int_a^b f\bar{\phi}_n dx=\frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}\quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

则称c_n是f关于(ϕ_n)的 Fourier 常数，而称$\sum c_n\phi_n$是f的 Fourier 级数；写作$f\sim(c_n)$或

$$(1.9.4)\qquad f\sim\sum c_n\phi_n.$$

所有这些定义都与§1.3中的类似．它们只就L^2中的函数被定义，这是因为对于其它函数类中的f，(f, ϕ_n)通常未必存在；但是假如对ϕ_n加以更强的限制，则上述诸定义可以适用于更广的范围．例如，若ϕ_n对每一个n是有界的，那末L中任意的f具有如(1.9.3)和(1.9.4)所定义的 Fourier 级数．我们在一开始引入的三角函数系就满足这个条件．

从几何意义上说，我们可以把ϕ_n看作是L^2空间的一个点或一个向量（向量始点位于0）．若(ϕ_n)是直交的，则诸向量是直交的；若(ϕ_n)是就范的，诸向量是单位向量．若(ϕ_n)是一就范直交系，f属于L^2，且$f\sim\sum c_n\phi_n$，则c_n可以看作f关于"直交轴"系的相应于ϕ_n的"坐标"．

具有常系数的关于诸ϕ_n的有限线性组合

$$P(\phi)=a_0\phi_0+a_1\phi_1+\cdots+a_n\phi_n,$$

称为ϕ_n的多项式．假如只有一切系数等于0时才有$P(\phi)$是0，则称ϕ_n是线性无关的：这只有当ϕ_n对于一个坐标系构成适当的基底时才可能．特别，在线性无关的系中没有一个元素是0．

上述最后的那些定义是与直交性无关的．我们可以从L^2的任一线性无关系(ψ_n)中导出一个直交系(ϕ_n)，从而实现"直交化"．

每一 ϕ_n 是 ψ_n 的多项式（只牵涉到 $\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_n$），$\phi_n$ 也是线性无关的，而每一 ψ_n 又是 ϕ_n 的多项式. 构成 ϕ_n 后，可以乘一适当的因子使之就范化. 上述对于 L^2 的过程类似于在通常几何学中使斜轴变为直交轴的变换.

1.10 直交系的例子

(1) 函数系

$$(E) \qquad e^{nix} \quad (-\infty<n<\infty)^{*)}$$

在 $(-\pi, \pi)$ 上或是在任何长度为 2π 的区间上是直交的. 函数系

$$(E') \qquad (2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{nix} \quad (-\infty<n<\infty)$$

是就范直交的.

(2) 函数系

$$(T) \qquad \frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

在 $(-\pi, \pi)$ 上直交. 函数系

$$(T') \qquad (2\pi)^{-\frac{1}{2}}, \pi^{-\frac{1}{2}}\cos x, \pi^{-\frac{1}{2}}\sin x, \pi^{-\frac{1}{2}}\cos 2x, \cdots$$

是就范直交的.

(3) 函数系

$$(C) \qquad \frac{1}{2}, \cos x, \cos 2x, \cdots,$$

$$(S) \qquad \sin x, \sin 2x, \cdots$$

在 $(0, \pi)$ 上是直交的.

(4) Legendre 多项式系

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^2-1)^n$$

$$=\frac{2n!}{2^n(n!)^2}(x^n-\cdots) \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

在 $(-1, -1)$ 上是直交的. 乘以 $\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 后成为就范直交系. 这

---

*) 在这种情形下，将 ϕ_n 按 n 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 编号比从 0 到 $+\infty$ 更方便.

个函数系是从(x^n)用§1.9中所叙述的过程直交化而获得的.

1.11 一些进一步的知识 若(ϕ_n)是一直交系，则称$\sum c_n\phi_n$是一直交函数级数或直交级数. 这种级数未必是§1.9意义下的Fourier级数；未必收敛或"可和"；即使收敛或可和，也未必是其和函数的Fourier级数. 这些正是我们必须对三角级数加以考虑的问题.

在下一章中我们将证明关于L^2中直交级数的最基本的定理. 这里我们插入若干一般的事实.

对于一个函数系(ψ_n)，不必是直交的，假如在$L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$(或$C$)中不存在非零函数$f$与每一$\psi_n$直交，即由

$$\int_a^b f\bar{\psi}_n dx=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

推得$f\equiv 0$，则称(ψ_n)是L^p(或C)中的完备系. 这个定义只有当ψ_n属于共轭类$L^{p'}$(或L)时才有用. 从定义可知，若(ψ_n)在L^p中是完备的，则当$q>p$时，(ψ_n)在L^q和在C中也是完备的.

若L^p中的函数系(ψ_n)的多项式$P(\psi)$的全体在L^p(或C)中稠密，则称(ψ_n)在L^p(或C)中是封闭的. 若(ψ_n)在L^p中是封闭的而$1\leqslant q<p$，则(ψ_n)在L^q中也是封闭的. 因为假设f是L^q中的任一函数，由定理1，L^p中有函数g使$\delta_q(f-g)<\frac{1}{2}\varepsilon$；再由已给的条件，存在着多项式$\Psi$满足$\delta_p(g,\ \Psi)<\frac{1}{2}\varepsilon(b-a)^{1/p-1/q}$，因此从(1.5.5)得到$\delta_q(g,\ \Psi)<\frac{1}{2}\varepsilon$. 若$(\phi_n)$在$C$中是封闭的，则对$1\leqslant p<\infty$，$(\phi_n)$在$L^p$(但在$L^\infty$中未必)是封闭的. 我们将在第二章中看到函数系$(x^n)$在$L$中是完备的和在$C$中是封闭的；于是可见，对$1\leqslant p<\infty$，$(x^n)$在$L^p$中既是完备的又是封闭的.

若§1.9中的函数系(ψ_n)在L^p中是完备的(或封闭的)，而(ϕ_n)是它的直交化系，则(ϕ_n)是完备的(或封闭的). 可是直交化

的过程要求假设每一ψ_n属于L^2.

若(ϕ_n)是一完备的就范直交系，又f和g关于(ϕ_n)有同样的Fourier级数，则$f\equiv g$.

在结束本章之前我们引入三个很简单的但是常用的定理. 为简单起见我们假定(ϕ_n)是L^∞中的就范直交系.

定理6. 若

$$\Phi_n=\sum_0^n c_m\phi_m\to f\,(L^p),$$

则$\sum c_n\phi_n$是f的Fourier级数.

因为由(1.7.3),

$$\int f\bar{\phi}_m\,dx=\lim_{n\to\infty}\int \Phi_n\bar{\phi}_m\,dx=\lim_{n\to\infty}c_m=c_m.$$

定理7. 若$\sum c_n\phi_n$是控制收敛的(特别，假定它是有界的或者一致收敛的)，则$\sum c_n\phi_n$是它的和的Fourier级数.

因为我们可以乘以$\bar{\phi}_m$再逐项积分.

定理8. 若(ϕ_n)是完备的，又f的Fourier级数控制收敛于s，则$s\equiv f$.

因为由定理7，这里的级数是其和的Fourier级数. 既然s和f有同样的Fourier级数，因此$s\equiv f$. 特别，在两个函数都连续的点上$s=f$.

II. Hilbert 空间中的 Fourier 级数

2.1 L^2 中一般的 Fourier 级数 以下规定(ϕ_n)是$L^2(a, b)$中的一个就范直交系，f是L^2中的任意函数，而$\sum c_n\phi_n$是它的 Fourier 级数．我们称

(2.1.1) $$f_n=\sum_0^n c_m\phi_m$$

为f的n阶 Fourier 多项式．这里 N 就是 N_2.

定理 9. 若

(2.1.2) $$\Phi_n=\sum_0^n \gamma_m\phi_m$$

为ϕ的任一多项式，则

(2.1.3) $$N^2(f-\Phi_n)=N^2(f)-\sum_0^n|c_m|^2+\sum_0^n|c_m-\gamma_m|^2.$$

特别，

(2.1.4) $$N^2(f-f_n)=N^2(f)-\sum_0^n|c_m|^2.$$

容易明了，通过逐项积分就有

$$\int_a^b f\bar{\Phi}_n dx=\sum_0^n c_m\bar{\gamma}_m,\quad \int_a^b|\Phi_n|^2dx=\sum_0^n|\gamma_m|^2.$$

因此

$$\begin{aligned}N^2(f-\Phi_n)&=\int_a^b(f-\Phi_n)(\bar{f}-\bar{\Phi}_n)dx\\&=N^2(f)-\sum_0^n c_m\bar{\gamma}_m-\sum_0^n\bar{c}_m\gamma_m+\sum_0^n|\gamma_m|^2\\&=N^2(f)-\sum_0^n|c_m|^2+\sum_0^n(c_m-\gamma_m)(\bar{c}_m-\bar{\gamma}_m),\end{aligned}$$

这就是(2.1.3)．作为一个推论，我们有

定理 10. 在一切n阶多项式Φ_n中，给出f的最佳平方平均

逼近的是 f 的 Fourier 多项式 f_n.

定理 11. 若 $f\sim(c_n)$，则

$$\sum_0^\infty |c_n|^2 \leqslant \mathrm{N}^2(f) = \int_a^b |f|^2 dx. \tag{2.1.5}$$

2.2 Riesz-Fischer 定理　下面的定理更为深刻，因为它依赖于定理 2 (对 $p=2$).

定理 12. 假设 $\sum |c_n|^2<\infty$. 则存在着 L^2 中的函数 f，它的 Fourier 常数是 c_n，而 $f_n\to f\,(L^2)$，即

$$\int_a^b |f_n-f|^2 dx\to 0, \tag{2.2.1}$$

且

$$\int_a^b |f|^2 dx=\sum_0^\infty |c_n|^2. \tag{2.2.2}$$

这些结果几乎立即可从定理 2 推得. 若 $n>m$，则当 n, m 都趋向于 ∞ 时，

$$\int_a^b |f_m-f_n|^2 dx=\sum_{m+1}^n |c_k|^2\to 0.$$

因此存在着 L^2 中的函数 f 满足 (2.2.1). 由定理 6, 取 $p=2$，即得 c_n 是 f 的 Fourier 常数. 最后，利用 (2.1.4) 知 (2.2.1) 和 (2.2.2) 等价.

2.3 完备系和 Parseval 定理　直到现在为止我们没有用到完备性的概念；现在我们假设 (ϕ_n) 是完备的. 于是推得：第一，定理 12 中的 f 是本质唯一的；第二，对 L^2 中以 c_n 为 Fourier 常数的任意函数 f，(2.2.1) 和 (2.2.2) 都成立.

定理 13. 若 (ϕ_n) 是完备的就范直交系，f 属于 L^2，且

$$f\sim(c_n),$$

则 f 与 (c_n) 满足 (2.2.1) 和 (2.2.2).

由于 $\sum |c_n|^2<\infty$, 利用定理 11, 这里的 f 对等于定理 12 中的 f.

定理 14. 若 f 和 F 都属于 L^2, $f\sim(c_n)$ 和 $F\sim(C_n)$, 则

$$\int_a^b f\bar{F}\,dx=\sum_0^\infty c_n\bar{C}_n. \tag{2.3.1}$$

这个级数是绝对收敛的.

因为

$$\int_a^b f_n\bar{F}\,dx=\sum_0^n c_m\int_a^b \phi_m\bar{F}\,dx=\sum_0^n c_m\bar{C}_m.$$

但由定理 13, $f_n\to f(L^2)$, 所以由(1.7.3),

$$\int f_n\bar{F}\,dx\to\int f\bar{F}\,dx.$$

级数的绝对收敛性是从 $\sum|c_n|^2$ 和 $\sum|C_n|^2$ 的收敛性得到的.

"Parseval 定理"这个名称有时用于(2.2.2),有时用于更一般的等式(2.3.1). 可以看出,这里出现的定理可作为 Riesz-Fischer 定理的一个极为自然的推论. 可是对于其它的特殊函数系,这就不是那末显然了;其困难在于证明函数系的完备性,而在此地是作为一个假设的.

2.4 Mercer 定理 从定理 11 推得, L^2 中函数的 Fourier 常数趋向于 0. 如果我们假定(ϕ_n)具有更多的条件,则(如同我们在§1.9 所注明的) 可以定义更广的函数类的 Fourier 常数. 一个特别重要的情形(包含三角函数系在内)是其中 ϕ_n 为一致有界.

定理 15. 若(ϕ_n)是一就范直交系且 $|\phi_n|\leqslant H$, 则 L 中任一函数 f 的 Fourier 常数趋向于 0.

由定理 1, L^2 中存在着函数 F 使

$$\int|f-F|\,dx<\varepsilon.$$

若 $F\sim(C_n)$, 则

$$|c_n| = \left|\int f\bar{\phi}_n dx\right| \leqslant \left|\int F\bar{\phi}_n dx\right| + \int |f-F|\,|\phi_n|\,dx$$
$$\leqslant |C_n| + H\varepsilon.$$

但是由于 F 属于 L^2，故 $C_n \to 0$；因而对充分大的 n，$|c_n| < 2H\varepsilon$.

2.5 封闭性和完备性 从我们的分析可知在 L^2 中封闭性和完备性是等价的(不论函数系直交与否).

定理 16. $L^2(a, b)$ 中的函数系当且仅当它完备时是封闭的.

设给定的函数系为(ψ_n)，由 §1.9，只要对由(ψ_n)就范直交化以后的函数系(ϕ_n)证明等价性就可以了.

(i) 若(ϕ_n)是完备的且 f 属于 L^2，则由定理 13，$f_n \to f(L^2)$. 由于 f_n 是一个多项式 Φ_n，所以(ϕ_n)是封闭的.

(ii) 假设(ϕ_n)是封闭的，f 属于 L^2 且 f 的一切 Fourier 常数为 0. 由于 (ϕ_n) 是封闭的，因此存在着一列多项式 Φ_n 使 $\Phi_n \to f(L^2)$，即 $\mathrm{N}(f-\Phi_n) \to 0$；于是，由定理 10，$\mathrm{N}(f-f_n) \to 0$. 但是 $f_n = 0$，所以 $\mathrm{N}f = 0$，$f \equiv 0$. 这样，(ϕ_n) 是完备的.

自然要问在不具备上述等价性的其它空间 L^p 中还有什么是正确的呢？下述两个定理给出这个问题的解答. 我们将证明定理 17，但略去定理 18 的证明，因为它依赖于一个所谓"弱收敛"的概念，而这个概念我们不打算用它.

定理 17. 若 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，而$(\psi_n)$在 L^p 中是封闭的，则它在 $L^{p'}$ 中是完备的.

定理 18. 若 $1 < p \leqslant \infty$，而(ψ_n)在 L^p 中是完备的，则它在 $L^{p'}$ 中是封闭的.

为了证明定理 17，假设 (ψ_n) 在 L^p 中是封闭的，又设 f 属于 $L^{p'}$，且对每一 n，$\int f\psi_n dx = 0$. 写着 $f = |f|e^{i\theta}$，则 $e^{-i\theta} = e^{-i\theta(x)}$ 是可测且有界的，因而属于 L^p. 所以存在着一列多项式 Ψ_n 使 $\Psi_n \to e^{-i\theta}(L^p)$，同时由(1.7.3)，

$$\int|f|dx=\int fe^{-i\theta}dx=\lim\int f\Psi_n dx=0,$$

从而得到 $f\equiv 0$. 因此 (ψ_n) 在 $L^{p'}$ 中是完备的.

定理 18 在 $p=1$ 时并不成立.

2.6 三角函数系的完备性 我们现在来证明三角函数系 (E) 和 (T) 是在 L 中(从而在 L^2 中)完备的.

定理 19. 三角函数系 (E) 和 (T) 在 $L(-\pi, \pi)$ 中是完备的: 若 f 属于 $L(-\pi, \pi)$, 又 f 的 Fourier 常数皆为 0, 则 f 是零.

选择哪个函数系显然是没有什么区别的. 我们选取 (T), 并且首先证明假若 (T) 在 C 中是完备的, 那末 (T) 在 L 中也是完备的. 为此假定 f 是 L 中的一个实函数, 并且设

$$F(x)=\int_0^x f(y)dy-\frac{1}{2}a_0x,$$

那末 F 是连续的和周期的. 若 $F\sim(A_n, B_n)$, $n\geqslant 1$, 则由分部积分, 成立着

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$
$$=-\frac{b_n}{n};$$

类似地 $B_n=a_n/n$*). 若对一切 n, a_n, b_n 都是 0, 则对 $n\geqslant 1$, A_n 和 B_n 都是 0, 且 $F-\frac{1}{2}A_0$ 的一切 Fourier 常数都是 0. 既然假定 (T) 是在 C 中完备的, 则 $F-\frac{1}{2}A_0\equiv 0$. 又 F 是连续的, 故

$$F=\frac{1}{2}A_0,\quad f\equiv\frac{1}{2}a_0=0.$$

现在只要证明 (T) 在 C 中是完备的. 我们暂时假定, 对于任意正数 δ 和 η, 有三角多项式 $T_n(x)$ 使

*) A_0 的值参见定理 43(§ 3.8).

$$(2.6.1)\qquad T_n(x)\geqslant 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\,dx=1,\ T_n(x)\leqslant\eta \quad (\delta\leqslant|x|\leqslant\pi).$$

现在假设 f 是连续的但不为零，它的最大模为 M，此外一切 a_n 和 b_n 都是 0，则对每一个 ξ，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi)T_n(x)\,dx=\int_{\xi-\pi}^{\xi+\pi} f(x)T_n(x-\xi)\,dx=0.$$

由于 $f\not\equiv 0$，必有 $c\neq 0$ 和 ξ 使 $f(\xi)=c$；不妨设 c 是正数．因为 f 是连续的，所以有正数 δ 使在 $(\xi-\delta,\ \xi+\delta)$ 内 $f>\frac{1}{2}c$；从而

$$\begin{aligned}0&=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi)T_n(x)\,dx\\&\geqslant\frac{1}{2}c\int_{-\delta}^{\delta}T_n(x)\,dx-M\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)T_n(x)\,dx\\&=\frac{1}{2}c-\left(\frac{1}{2}c+M\right)\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)T_n(x)\,dx\\&\geqslant\frac{1}{2}c-\left(\frac{1}{2}c+M\right)2\pi\eta.\end{aligned}$$

对于充分小的 η，这是一个矛盾．

我们尚须证明，确实存在着满足 (2.6.1) 的 T_n．例如取

$$T_n=\frac{(1+\cos x)^n}{\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)^n\,dx}=\frac{\left(\cos\frac{1}{2}x\right)^{2n}}{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{1}{2}x\right)^{2n}dx}.$$

显然 T_n 满足 (2.6.1) 的前二条件，而当 $\delta\leqslant x\leqslant\pi$ 和 $n\to\infty$ 时，

$$T_n<\frac{\left(\cos\frac{1}{2}\delta\right)^{2n}}{\int_0^{\frac{1}{2}\delta}\left(\cos\frac{1}{2}x\right)^{2n}dx}<\frac{2}{\delta}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{4}\delta}\right)^{2n}\to 0,$$

因此对充分大的 n，T_n 也满足 (2.6.1) 的第三个条件．

2.7 三角级数的 Parseval 定理和 Riesz-Fischer 定理

现在我们要对函数系 (E) 和 (T) 将定理 10 到 14 的内容重新

加以叙述. 关于 (T) 我们只叙述最重要的情况, 即函数是实的情况下的结果.

定理 20. 在一切 n 阶复三角多项式中, 给出 L^2 中函数 f 的最佳平方平均逼近的是 f 的 Fourier 多项式 f_n.

若 f 属于 L^2 且 $f\sim(c_n)$, 则 $\sum|c_n|^2$ 是收敛的, 且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \tag{2.7.1}$$

和

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-f_n|^2\,dx\to 0. \tag{2.7.2}$$

若 F 也属于 L^2 且 $F\sim(C_n)$, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\overline{F}\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\overline{C}_n. \tag{2.7.3}$$

若 c_n 是使 $\sum|c_n|^2$ 收敛的任一数列, 则在 L^2 中存在着实质上是唯一的函数 f, 它的 Fourier 系数为 c_n.

定理 21. 对于实的三角函数系 (T) 有相应的结果, 当 f 和 F 是实的时候, 对应于公式 (2.7.1) 和 (2.7.3) 的是

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\,dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \tag{2.7.4}$$

和

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}fF\,dx=\frac{1}{2}a_0A_0+\sum_{1}^{\infty}(a_nA_n+b_nB_n). \tag{2.7.5}$$

2.8 关于其它函数系的一些定理 在这一节和下一节中我们收集了一些可从定理 19 推出的结果. 这些结果具有同样的深度, 而它们之间的逻辑依赖关系可用许多不同的方法表达出来.

(1) 我们第一个附注是显然的. §1.10(3) 中的函数系 (C) 和 (S) 在 $(-\pi,\pi)$ 上不是完备的, 例如 $\sin x$ 关于 (C) 的一切 Fourier 常数为 0. 但是每一系在 $(0,\pi)$ 上是完备的. 例如, 假设 $f(x)$ 定义于 $(0,\pi)$ 而它关于 (C) 的 Fourier 常数全为 0; 又设

$$f^*(x)=f(x)\quad (x\in(0,\ \pi)),$$
$$f^*(x)=f(-x)\quad (x\in(-\pi,\ 0)),$$

则 f^* 为偶函数. f^* 关于(T)的 Fourier 常数均为 0, 所以 $f^*\equiv 0$, 从而 $f\equiv 0$.

(2) 下一定理是关于非直交函数系的.

定理 22. 对于 $n=N,\ N+1,\ \cdots$, 函数系 (x^n) 在 $L(a,\ b)$ 上是完备的.

这里$(a,\ b)$是任意有限区间. 我们必须证明由

$$\int_a^b f(x)x^n dx=0\quad (n=N,\ N+1,\ \cdots)$$

推出 $f\equiv 0$. 利用 $x^N f$ 代替 f 可将定理归结为 $N=0$ 的情形; 再由一个线性变换可归结为 $a=-\pi$, $b=\pi$ 的情形. 但在这个情形下, 因为 $\cos mx$ 与 $\sin mx$ 的 Taylor 级数 $\sum u_n x^n$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 上是一致收敛的, 所以对于一切 m 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx\,dx=\sum u_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)x^n dx=0.$$

从而由定理 19 推得 $f\equiv 0$.

一个推论是: §1.10(4) 中的 Legendre 函数系在 $L(-1,\ 1)$ 上是完备的.

2.9 Weierstrass 定理 函数系 (x^n) 在 L 中是完备的, 从而在任意 L^p 中和在 C 中是完备的. 从定理 18 推出它在任意 $L^p(1\leqslant p<\infty)$ 中是封闭的. 但此论断依赖于一个我们未曾证明的定理, 所以它的真实性没有揭露, 其实, 其真实性包含在有名的 Weierstrass 定理之中.

定理 23. 若 $f(x)$ 在 $\langle a,\ b\rangle$ 上连续, 则存在着多项式 $P(x)$ 使得对于 $a\leqslant x\leqslant b$ 有 $|f-P|<\varepsilon$.

换言之, (x^n) 在 C 中是封闭的. 关于 Weierstrass 定理, 有许多以各种重要原理为基础的直接证明, 但从三角多项式的相应定

理推导出来在此地最为自然.

定理 24. 若 $f(x)$ 是周期函数且在 $\langle -\pi, \pi\rangle$ 上连续，则存在着三角多项式 $T_n(x)$ 使对 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 有 $|f-T_n|<\varepsilon$.

显然，在 C_2 中有周期函数 g 使 $|f-g|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 对这样的 g 和对 $n>0$，利用两次分部积分得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} g \frac{\cos}{\sin} nx\, dx = -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} g'' \frac{\cos}{\sin} nx\, dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

因此由定理 8 及 19，g 的 Fourier 级数一致收敛，它的和为 g. 所以假如 T_n 是 g 的 Fourier 级数的足够多项的和，则有

$$|g-T_n|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

从而 $|f-T_n|<\varepsilon$.

特别，定理 24 表示 (不利用定理 18) (T) 在 L^p 中是封闭的. 因为由定理 1，连续的周期函数类 C^* 在 L^p 中稠密，而由定理 24，(T) 在 C^* 中是封闭的.

定理 23 是一推论. 首先作一线性变换可将定理归结为

$$a=-\frac{1}{2}\pi,\quad b=\frac{1}{2}\pi$$

的情形；而在 $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ 外定义 f 使之成为一个具有周期为 2π 的连续函数. 于是存在着三角多项式 T_n 使对一切 x 有

$$|f-T_n|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

但由 Taylor 定理，T_n 可以展开为在 $\langle -\pi, \pi\rangle$ 上一致收敛的幂级数. 若 P 是此级数的足够多项的和，则对

$$-\frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\pi$$

有

$$|T_n-P|<\frac{1}{2}\varepsilon,\quad |f-P|<\varepsilon.$$

III. Fourier 三角级数的其它性质

3.1 Fourier 常数的简单性质 这里我们集中注意于§1.3所定义的 Fourier 三角级数. 就应用的方便采取复的形式 (E) 或实的形式 (T)，在后一情形通常假设 f 是实的. 在任何情况都假定 f 是周期函数. 我们从一些显然的事实开始.

定理 25. 若 $f(\theta)\sim(c_n)$，则 $f(-\theta)\sim(c_{-n})$ 和 $\bar{f}(\theta)\sim(\bar{c}_{-n})$. 若 m 为整数，则 $e^{mi\theta}f(\theta)\sim(c_{n-m})$. 若 $f\sim(c_n)$，$g\sim(d_n)$，则

$$af+bg\sim(ac_n+bd_n).$$

定理 26. 若 $f(\theta)\sim(c_n)$，则 $f(\theta+\alpha)\sim(C_n(\alpha))$，又若

$$f(\theta)\sim(a_n,\ b_n),$$

则

$$f(\theta+\alpha)\sim(A_n(\alpha),\ B_n(\alpha))^{*)}.$$

定理 27. 若 f 绝对连续，则 $f'\sim(inc_n)$ 或 $f'\sim(nb_n,\ -na_n)$.

上述诸定理的证明留给读者. 最后一个定理和§2.6一样可用分部积分法证得.

定理 28. 例如 f 与 g 属于 L^2，$f\sim(c_n)$ 和 $g\sim(d_n)$，则

$$fg\sim(r_n),$$

其中

$$r_n=\sum_{-\infty}^{\infty}c_m d_{n-m}. \tag{3.1.1}$$

由定理25得知 $\bar{g}\sim(\bar{d}_{-n})$ 和 $h=\bar{g}e^{mi\theta}\sim(\bar{d}_{m-n})$. 因此，利用形式(2.3.1)的 Parseval 定理于 f 和 h，得到

$$r_m=\frac{1}{2\pi}\int fge^{-mi\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int f\bar{h}\,d\theta=\sum c_n d_{m-n},$$

*) A_n, B_n 和 C_n 分别由(1.1.2)，(1.2.6)和(1.1.8)所定义.

将上式中的 m 和 n 互换就是 (3.1.1). fg 的实的 Fourier 常数的表达式较为复杂.

公式(3.1.1)和(1.8.1)相仿, 因而 (r_n) 可称为 (c_n) 和 (d_n) 的折合. 与之相应提出了一个逆定理.

定理 29. 假如 f 与 g 属于 L, $f\sim(c_n)$, $g\sim(d_n)$, r 是 f 与 g 的折合, 则 $r\sim(c_n, d_n)$.

由定理 4, r 属于 L. 且

$$\frac{1}{2\pi}\int r(\theta)e^{-ni\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int d\theta\left\{\frac{1}{2\pi}\int f(\theta-t)e^{-ni(\theta-t)}\cdot g(t)e^{-nit}\,dt\right\}.$$

此地里边的积分是 $f(\theta)e^{-ni\theta}$ 与 $g(\theta)e^{-ni\theta}$ 的折合; 因此由(1.8.2),

$$\frac{1}{2\pi}\int r(\theta)e^{-ni\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int f(\theta)e^{-ni\theta}\,d\theta\,\frac{1}{2\pi}\int g(\theta)e^{-ni\theta}\,d\theta=c_nd_n.$$

3.2 Riemann-Lebesgue 定理 现在来讨论 Fourier 级数的基本定理之一.

定理 30. 任何可积函数的 Fourier 常数趋向于 0.

此定理是定理 15 的特殊情况. 由于它的重要性我们再给出一个证明方法, 我们安排这样一个证明是为了获得一个重大的推广.

定理 31. 设 f 和 g 都有周期 2π; f 属于 L, g 属于 V; λ 和 α 为实数; 又 $-\pi\leqslant a\leqslant b\leqslant\pi$. 则当 $|\lambda|\to\infty$ 时, 关于 a, b, α 一致地成立着

$$J(a,b,\alpha,\lambda)=\int_a^b f(\theta+\alpha)g(\theta)e^{-\lambda i\theta}\,d\theta\to 0. \tag{3.2.1}$$

定理 30 是定理 31 当 $a=-\pi$, $b=\pi$, $\alpha=0$, $g=1$, $\lambda=n$ 时的情况.

(i) 先设 $g=1$. 我们可以认为 $\lambda>0$. 则

$$J=\int_a^b f(\theta+\alpha)e^{-\lambda i\theta}\,d\theta=-\int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda}f\left(\theta+\alpha+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-\lambda i\theta}\,d\theta$$

$$=-\int_a^b f\left(\theta+\alpha+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-\lambda i\theta}\,d\theta+o(1),$$

因为改变积分限所引起的误差至多是 $\int |f|\,d\theta$ 在两个长为 π/λ 的区间上的积分，因而它当 $|\lambda|\to\infty$ 时一致地为 $o(1)$. 所以

$$J=\frac{1}{2}\int_a^b\left\{f(\theta+\alpha)-f\left(\theta+\alpha+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right\}e^{-\lambda i\theta}\,d\theta+o(1), \tag{3.2.2}$$

由定理 3 (用 $p=1$) 得到

$$|J|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b\left|f\left(\theta+\alpha+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(\theta+\alpha)\right|d\theta+o(1) \tag{3.2.3}$$
$$=o(1).$$

特别，当 $a=-\pi$，$b=\pi$，$\alpha=0$，$\lambda=n$ 时，所有积分都是在 $(-\pi,\pi)$ 上的积分，在(3.2.2)中的 $o(1)$ 可以删去. 因此我们得到 $|c_n|$ 的一个重要的上界，即

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)-f(\theta)\right|d\theta\quad(n\neq0). \tag{3.2.4}$$

(ii) 不妨假设 f 和 g 是实的. 例如 $g\in V$，则 $g=g_1-g_2$，其中 g_1、g_2 是正的、有界的递降函数. 于是 J 是由四个相似的积分所组成，其中之一为

$$\int_a^b f(\theta+\alpha)g_1(\theta)\cos\lambda\theta\,d\theta=g_1(\alpha)\int_a^c f(\theta+\alpha)\cos\lambda\theta\,d\theta,$$

这里 $a<c<b$，因而由 (i) 推得所要的结果.

3.3 几个简单不等式

3.3 几个简单不等式　在本节中我们收集了几种特殊类型函数的 Fourier 常数的简单定理.

定理 32. 若 $f\geqslant0$，则 $|c_n|\leqslant c_0$，$|a_n|\leqslant a_0$，$|b_n|\leqslant a_0$.

定理 33. 若 f 为奇函数，且在 $(0,\pi)$ 上 $f\geqslant0$，则 $|b_n|\leqslant nb_1$.

这些定理的证明留给读者；定理 33 的证明可用不等式

$$|\sin n\theta|\leqslant n|\sin\theta|$$

来完成.

定理 32 和 33 在解析函数的理论中有有趣的应用.

(i) 假设 $F(z)=C_0+C_1z+C_2z^2+\cdots$ 是在 $r<1$ 正则的解析函数，又设

$F=u-iv$ 和 $u\geqslant 0$. 则对固定的 r, u 满足定理32的条件, 因此, 由(1.2.10), 有 $|C_n|r^n\leqslant 2\mathrm{R}C_0$. 令 $r\to 1$ 得到: 假如当 $r<1$ 时 $F=\sum C_n z^n$ 的实部$\geqslant 0$, 则 $\mathrm{R}C_0\geqslant 0$ 和当 $n>0$ 时 $|C_n|\leqslant 2\mathrm{R}C_0$.

(ii) 假设 $F(z)=z+C_2z^2+\cdots$ 在 $|z|<1$ 是正则和单叶*) 的, 且其系数均为实数. 稍加考虑即知圆周 $|z|=r<1$ 经过变换 $w=f(z)$ 映照到 w 平面的一个 Jordan 曲线, 它一定通过两个实的点, 即对应于 $z=\pm r$ 的点, 并且对固定的 r, v 满足定理 33 的条件. 因此由(1.2.10)有 $|C_n|r^n\leqslant nr$. 令 $r\to 1$ 得到: 假如 $F=z+C_2z^2+\cdots$ 有实系数且在 $|z|<1$ 是单叶的, 则 $|C_n|\leqslant n$.

在下面两个定理中取 $(0, 2\pi)$ 为基本区间较合适.

定理 34. 若 f 在 $(0, 2\pi)$ 上递降, 则 $b_n\geqslant 0$.

因为

$$\pi b_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/n}\left\{f\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)-f\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}+\theta\right)\right\}\sin n\theta\, d\theta\geqslant 0.$$

定理 35. 若 f 在 $(0, 2\pi)$ 上是凸的和 $n>0$, 则 $a_n\geqslant 0$.

因为 $f(x+h)-f(x)$ 对于每一个正的 h 是 x 的递增函数, 所以

$$\pi a_n=\sum_0^{n-1}\int_0^{\pi/2n}\left\{f\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right)-f\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}+\theta\right)\right.$$
$$\left.-f\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}-\theta\right)+f\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}-\theta\right)\right\}\cos n\theta\, d\theta\geqslant 0.$$

3.4 Fourier 常数的数量级

Riemann-Lebesgue 定理指出, 任何一个函数 f 的 Fourier 常数趋向于 0; 这个命题在某种意义下, 即使对连续函数而言, 也不能再改进了. 因为, 假如(χ_n)是任意一个正的递降数列但具有极限为 0, 我们可以选取一个趋向无穷大的整数序列 n_k 适合于 $k^{-2}>\chi_{n_k}$. 级数 $\sum k^{-2}\cos n_k\theta$ 为一致收敛, 所以它是一个连续函数的 Fourier 级数而当 $n=n_k$ 时 $a_n=k^{-2}>\chi_n$.

---

*) 如果一个函数在某区域内不会两次取到相同的函数值, 称此函数在该区域内是单叶的.

定理 36. 设 $0<\alpha<1$. 假如 $|f(\theta+h)-f(\theta)|=O(|h|^{\alpha})$ 关于 θ 一致地成立，或者更一般地，假如对 $p\geqslant 1$ 成立着

$$\mathrm{M}_p\{f(\theta+h)-f(\theta)\}=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+h)-f(\theta)|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$=O(|h|^{\alpha}),$$

则

$$c_n=O(|n|^{-\alpha}).$$

因为由(3.2.4)和(1.5.5)有

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{2}\mathrm{M}_1\left\{f\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)-f(\theta)\right\}\leqslant\frac{1}{2}\mathrm{M}_p\left\{f\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)-f(\theta)\right\}.$$

当 O 换成 o 时，有着相应的定理.

定理 37. 假如 f 属于 V，则 $c_n=O(|n|^{-1})$. 更精确地说，设 V 是 f 在 $(0,\ 2\pi)$ 上的全变差，则 $2\pi|nc_n|\leqslant \mathrm{V}$.

例如设 $n>0$，则

$$|c_n|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-ni\theta}d\theta\right|$$
$$=\left|\frac{1}{2n\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ni\theta}df(\theta)\right|\leqslant\frac{\mathrm{V}}{2n\pi}.$$

定理 38. 若 f 为绝对连续(特别设 f' 为有界)，则

$$c_n=o(|n|^{-1}).$$

因为，假如 $n\neq 0$ 而 c_n' 是 f' 的第 n 个 Fourier 常数，则由定理 27 及 30，有 $inc_n=c_n'=o(1)$.

定理 39. 假设 f 在 $\langle-\pi,\ \pi\rangle$ 上除了有限个(J 个)ξ_j 处有跳跃 $d_j=f(\xi_j+0)-f(\xi_j-0)$ 外是连续的，而在连续区间内是绝对连续的，又设 $n\neq 0$，则

$$c_n+\frac{i}{2n\pi}\sum_{1}^{J}d_j e^{-ni\xi_j}=-\frac{i}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(\theta)e^{-ni\theta}d\theta \tag{3.4.1}$$
$$=o\left(\frac{1}{|n|}\right).$$

用划分积分区间和分部积分法立即可以证明定理 39.

定理 40. 设$f^{(p-1)}$绝对连续(特别设$f^{(p)}$有界),则

$$c_n = o(|n|^{-p}).$$

这是定理 27 及 30 的另一个推论.

3.5 有界变差函数 通常我们所研究的 V 中的函数或者是不连续的或者是绝对连续的,后者的 Fourier 常数为 $o(|n|^{-1})$. 可能会认为 V 中的函数 f 的 Fourier 常数为 $o(|n|^{-1})$ 的必要充分条件是 f 为连续. 但是,事情不是那么简单.

定理 41. 存在着 V 中的连续函数,其 $c_n \neq o(|n|^{-1})$.

我们取$(0, 2\pi)$为基本区间. 用 $I_{1,1}$; $I_{2,1}$, $I_{2,2}$; $I_{3,1}$, $I_{3,2}$, $\cdots$ 表示 $(0, 2\pi)$ 上的“Cantor 的三分集”的余区间: $I_{1,1}$ 是 $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$, 即三等分的中间一个区间; $I_{2,1}$, $I_{2,2}$ 是剩下来的区间 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right)$ 和 $\left(\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right)$ 的三等分的中间一个区间; 等等. 我们定义 $\phi(\theta)$ 使在 $I_{1,1}$ 上为 $\frac{1}{2}$; 在 $I_{2,1}$, $I_{2,2}$ 上为 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$; 在 $I_{3,1}$, $I_{3,2}$, $\cdots$ 上为 $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\cdots$; 等等; 这样 $\phi(\theta)$ 除了在 Cantor 集的 θ 而外对一切 θ 全有定义,在 Cantor 集上根据连续性来定义. 于是 $\phi(\theta)$是连续的,它关于 θ 从 0 增加到 1,且其导数几乎处处为0. 这是 V 中的连续但不是绝对连续函数的典型例子. 假设当$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 时 $f(\theta) = \phi(\theta) - \theta/2\pi$, 又设 $f(\theta)$是周期函数, 则 $f(\theta)$是 V 中一个连续的周期函数. 若 $n > 0$, 则

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\phi(\theta) - \frac{\theta}{2\pi}\right\} e^{-ni\theta} d\theta \tag{3.5.1}$$

$$= \frac{1}{2n\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} d\phi(\theta) = \frac{p_n}{2n\pi i}.$$

假如我们能够证明 p_n 不趋向于 0, 则 $f(\theta)$就是定理中所要求的函数.

取 $n=3^m$. 则因 ϕ 在 $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$ 中为常数, 在剩下来的两个区间中有同样的变化, 所以

$$(3.5.2) \qquad p_{3^m}=\int_0^{2\pi} e^{-3^m i\theta}\, d\phi(\theta)=2\int_0^{\frac{2}{3}\pi} e^{-3^m i\theta}\, d\phi(\theta),$$

又因 $\phi\left(\frac{1}{3}\theta\right)=\frac{1}{2}\phi(\theta)$, 所以

$$2\int_0^{2\pi} e^{-3^{m-1}i\theta}\, d\phi\left(\frac{1}{3}\theta\right)=\int_0^{2\pi} e^{-3^{m-1}i\theta}\, d\phi(\theta)=p_{3^{m-1}}.$$

从而推得 $p_{3^m}=p_1$, 所以只要证明 $p_1\neq 0$ 就够了. 但 $\phi(\theta)$ 在

$$\left(\frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi\right)$$

为常数, 因此由 (3.5.2),

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\,p_1&=2\left(\int_0^{\frac{2}{9}\pi}+\int_{\frac{4}{9}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\right)\cos\theta\, d\phi(\theta)\\&=2\int_0^{\frac{2}{9}\pi}\left\{\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{4}{9}\pi\right)\right\}d\phi(\theta),\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{4}{9}\pi\right)&=2\cos\left(\theta+\frac{2}{9}\pi\right)\cos\frac{2}{9}\pi\\&\geqslant 2\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\,p_1&\geqslant 4\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi\int_0^{\frac{2}{9}\pi} d\phi(\theta)\\&=\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi>0.\end{aligned}$$

V 中的函数可以有可列无限个跳跃点, 但 f 在这些点的取值不影响它的 Fourier 常数. 因此不妨设对于一切 θ,

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\};$$

那末 Wiener 曾经证得 f 为连续的必要充分条件是

$$\sum_{-n}^{n} |mc_m| = o(n).$$

这个条件特别当 $c_n = o(|n|^{-1})$ 时是成立的.

3.6 几个基本公式 为方便起见,于此汇集几个今后经常用到的有名的定理. 证明留给读者.

首先,成立着下列恒等式:

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}, \tag{3.6.1}$$

$$\widetilde{D}_n(\theta) = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}, \tag{3.6.2}$$

$$F_n(\theta) = \frac{D_0(\theta) + D_1(\theta) + \cdots + D_n(\theta)}{n+1} = \frac{1-\cos(n+1)\theta}{4(n+1)\sin^2\frac{1}{2}\theta}. \tag{3.6.3}$$

如果在 $\theta = 2k\pi$ 处我们定义右方使之连续,则上述诸式对一切 θ 成立. 又

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta)d\theta = 1, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta)d\theta = 1. \tag{3.6.4}$$

其次,成立着不等式

$$|\sin\theta| \leqslant |\theta|, \quad 1-\cos\theta \leqslant \frac{1}{2}\theta^2, \tag{3.6.5}$$

$$\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi\right), \tag{3.6.6}$$

$$1-\cos\theta \geqslant \frac{2}{\pi^2}\theta^2 \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

$$(3.6.7)\quad \left|\sum_p^q e^{ni\theta}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\theta\right|}, \quad \left|\sum_p^q \lambda_n e^{ni\theta}\right| \leqslant \frac{\lambda_p}{\left|\sin\frac{1}{2}\theta\right|}.$$

在(3.6.7)，$\theta\neq 2k\pi$，$0\leqslant p\leqslant q$，且 λ_n 是正的，它当 n 增加时递降．一个推论是：假如 λ_n 递降于 0，则 $\sum\lambda_n e^{ni\theta}$ 在每一个不包含 2π 的倍数的闭区间上是一致收敛的．

最后，我们定义 Δu_n 和 $\Delta^2 u_n$ 如下：

$$\Delta u_n = u_n - u_{n+1}, \quad \Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n).$$

若 $u_n\to 0$，则 $\sum\Delta u_n = u_0$；又若 $\Delta^2 u_n\geqslant 0$，即设(u_n)是**凸**的，则

$$\Delta u_n\geqslant 0, \quad n\Delta u_n\to 0,$$

且

$$(3.6.8)\qquad \sum(n+1)\Delta^2 u_n = \sum\Delta u_n = u_0.$$

这里所有的求和号都是从 0 到 ∞．

3.7 一个特殊的三角级数 特殊的三角级数

$$(3.7.1)\qquad S(\theta) = \sum_1^\infty \frac{\sin n\theta}{n}$$

在一般理论中是特别重要的．

我们定义 $f(\theta)$ 如下：

$$(3.7.2)\qquad f(\theta) = \frac{1}{2}(\pi-\theta) \quad (0<\theta<2\pi), \quad f(0)=0,$$

而在其它地方由周期性来定义．它是奇函数，在 0 点有一个跳跃 π，并且是在一个周期内恰有一个跳跃点的最简单的周期函数．

设 $f(\theta)\sim(a_n, b_n)$，则 $a_n=0$，而当 $n>0$ 时由分部积分，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi-\theta)\sin n\theta\, d\theta = \frac{1}{n}.$$

因而 f 的 Fourier 级数即为 S．

级数 S 对于一切 θ 是收敛的，在任一不含 2π 的倍数的闭区间上是一致收敛的. 我们将要证明它是有界收敛的. 更一般地，我们要证明: 设 λ_n 是 n 的正的递降函数且 $n\lambda_n < H$，则 $\sum \lambda_n \sin n\theta$ 是有界收敛的. 不妨假设 $H=1$ 和 $0<\theta<\pi$. 于是，记

$$\nu = \mathrm{Min}(n,\ [\pi/\theta]),$$

就有

$$s_n(\theta) = \sum_1^n \lambda_m \sin m\theta = \left(\sum_1^\nu + \sum_{\nu+1}^n\right)\lambda_m \sin m\theta = s_n^{(1)}(\theta) + s_n^{(2)}(\theta)$$

(第二项当 $\nu \geqslant n$ 时是零). 此地

$$|s_n^{(1)}(\theta)| \leqslant \theta \sum_1^\nu m\lambda_m \leqslant \nu\theta \leqslant \pi,$$

而由(3.6.5)至(3.6.7)有

$$|s_n^{(2)}(\theta)| \leqslant \frac{\lambda_{\nu+1}}{\sin\frac{1}{2}\theta} \leqslant \frac{\pi}{(\nu+1)\theta} \leqslant 1.$$

特别，S 为有界收敛；因此由定理 8，它的和就是 f. 于是证得

定理 42. 级数 S 是 f 的 Fourier 级数并且有界地收敛于 f，它在任何不含 2π 的倍数的闭区间上是一致收敛的.

这里，定理 42 的证明(用到定理 8)用了三角函数系(T)的完备性. 因此用别的方法能够直接求 S 的和是有重要意义的，这种方法在数学分析的教科书上可以找到. 例如，设 $z=re^{i\theta}$，$r<1$，$0<\theta<2\pi$，由级数

$$\log(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \cdots,$$

取其实部和虚部，用 Abel 定理可得到

$$(3.7.3)\qquad \sum_1^\infty \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{1}{2}(\pi-\theta),\qquad \sum_1^\infty \frac{\cos n\theta}{n} = \log\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\qquad (0<\theta<2\pi).$$

第一式是定理 42 的一部分. 第二式可如第一式一样求得，但余弦级数当 $\theta=2k\pi$ 时是发散的，我们必须证明它在$(0,\ 2\pi)$内是控制收敛的.

一个简单的推论是:

$$(3.7.4)\qquad \sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \cdots = \frac{1}{4}\pi\,\mathrm{sgn}\,\theta\qquad (-\pi<\theta<\pi),$$

其中 $\operatorname{sgn}\theta$ 当 θ 为正，零或负时分别取 1, 0 或 -1. 这个级数是有界收敛的，并且是其和的 Fourier 级数. 级数的和在所有点 $k\pi$ 有跳跃，它是最简单的非常数的周期阶梯函数.

3.8 Fourier 级数的积分　现在应用定理 42 于一个重要的一般定理的证明.

定理 43. 设 $f\sim(a_n, b_n)$，则

$$\sum_1^\infty \frac{b_n}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)(\pi-\theta)\,d\theta =\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(\pi\operatorname{sgn}\theta-\theta)\,d\theta. \tag{3.8.1}$$

又

$$F(\theta)=\int_0^\theta f(t)\,dt-\frac{1}{2}a_0\theta =\sum_1^\infty \frac{b_n}{n}-\sum_1^\infty \frac{b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta}{n}, \tag{3.8.2}$$

最后一个级数是一致收敛的.

显然 $F(\theta)$ 是周期函数且 $F(2k\pi)=0$. 又由定理 42，得到

$$\sum_1^n \frac{b_m}{m}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sum_1^n \frac{\sin m\theta}{m}\,d\theta \to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)(\pi-\theta)\,d\theta, \tag{3.8.3}$$

这就是(3.8.1).

其次，要证明 (3.8.2)，我们不妨假设 $a_0=0$. $f(\theta+t)$ 作为 t 的函数，其 Fourier 常数由定理 26 知为 $A_n(\theta)$ 及 $B_n(\theta)$. 所以利用我们已经证明的 $f(\theta+t)=F'(\theta+t)$，得到

$$\sum_1^\infty \frac{B_n(\theta)}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F'(\theta+t)(\pi-t)\,dt =-F(\theta)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta+t)\,dt.$$

但由分部积分和(3.8.1)可见

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta+t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,(\pi-t)\,dt = \sum_1^\infty \frac{b_n}{n},$$

从而证得(3.8.2).

最后，级数(3.8.2)是一致收敛的. 因为

$$\left|\sum_p^q \frac{B_n(\theta)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta+t)|\,\left|\sum_p^q \frac{\sin nt}{n}\right|dt$$

$$\leqslant H\left(\int_0^\delta + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\right)|f(\theta+t)|\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} |f(\theta+t)|\,\left|\sum_p^q \frac{\sin nt}{n}\right|dt$$

$$= I_1 + I_2.$$

我们可以选取 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 使 $|I_1|<\varepsilon$; 然后，因为 S 在 $(\delta, 2\pi-\delta)$ 上一致收敛，所以可以取 $N=N(\delta, \varepsilon)=N(\varepsilon)$ 使当 $q>p\geqslant N$ 时 $|I_2|<\varepsilon$.

我们也可以将(3.8.2)写成

$$F(\theta)=\sum_1^\infty \frac{a_n\sin n\theta + b_n(1-\cos n\theta)}{n} = \sum_1^\infty \int_0^\theta A_n(t)\,dt.$$

因此我们特别证明了

定理 44. 任何 Fourier 级数可以逐项积分，并且积分后的级数是一致收敛的.

(3.8.2)的"复"的形式为

$$(3.8.4)\qquad F(\theta)=\int_0^\theta f(t)\,dt - c_0\theta = i\sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{n} - i\sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{n}e^{ni\theta}.$$

定理 43 和 44 给出 (T) 的完备性的另一证明. 因为假如对一切 n, $a_n=b_n=0$, 则 $F(\theta)=0$, 从而 $f(\theta)\equiv 0$. 这个证明当然要求我们不借助于定理 8 而已用初等方法找到了 S 的和.

假如在 (3.7.3) 的第一个级数中用 t 代 θ, 然后从 $t=0$ 到 $t=\theta$ 积分，我们得到

(3.8.5) $$\sum_1^{\infty}\frac{1-\cos n\theta}{n^2}=\frac{1}{2}\pi\theta-\frac{1}{4}\theta^2\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

从 0 到 π 积分第二个级数，得到

$$\int_0^{\pi}\log\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)d\theta=0,$$

因此

(3.8.6) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\theta\cot\theta\,d\theta=-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\pi\log 2.$$

3.9 一个基本的收敛定理 我们可以用定理 39 和定理 43 得到一个关于 Fourier 级数的收敛定理，它在一般情况中已经够用.

定理 45. 设 $f(\theta)$ 满足定理 39 的条件，则其 Fourier 级数有界收敛于 $\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$，而在任何连续的闭区间内一致收敛于 $f(\theta)$.

由(3.4.1)推得(在形式上)

$$\sum c_n e^{ni\theta}=c_0-\frac{i}{2\pi}\sum_1^J d_j\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}e^{ni(\theta-\xi_j)}-i\sum_{n\neq 0}\frac{\gamma_n}{n}e^{ni\theta},$$

其中 γ_n 为 f' 的 Fourier 常数. 因为 f' 属于 L，由定理 43 可知最后的级数是一致收敛的. 右边第二项可以写成

$$\frac{1}{\pi}\sum_1^J d_j\sum_1^{\infty}\frac{\sin n(\theta-\xi_j)}{n}=\psi(\theta);$$

这个级数是有界收敛的；在其和的任何连续闭区间上为一致收敛，且在 ξ_j 有和

$$\psi(\xi_j)=\frac{1}{2}\{\psi(\xi_j+0)+\psi(\xi_j-0)\}.$$

再由定理 8 即得本定理.

3.10 具有递降系数的级数 当 λ_n 为正的且单调递降趋于 0 时，级数

$$\text{(C)}\quad \frac{1}{2}\lambda_0+\sum\lambda_n\cos n\theta,\qquad \text{(S)}\quad \sum\lambda_n\sin n\theta$$

在任何区间 $0<\delta\leqslant\theta\leqslant2\pi-\delta$ 上一致收敛于和函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$：S 对所有 θ 收敛，C 或许除了 $\theta=2k\pi$ 外才收敛．它们具有不少有趣的但不很明显的性质，于此将加以叙述．因 C 为偶函数而 S 为奇函数，所以我们只要考虑区间 $(0,\pi)$．

定理 46．*假如 f（或 g）属于 L，则 C（或 S）为 f（或 g）的 Fourier 级数．*

这是第 VII 章中要证明的相当艰深的一般定理（定理 100）的一个推论．可是对于这些特殊的级数存在着简单的证明．

(i) 对于任意固定的 m，因为由 (3.6.5)，(3.6.6) 和 (3.6.7) 有

$$\left|\sum_{n=p}^{q}\lambda_n\sin n\theta\sin m\theta\right|\leqslant m\theta\left|\sum_{n=p}^{q}\lambda_n\sin n\theta\right|$$
$$\leqslant\frac{m\theta\lambda_p}{\sin\frac{1}{2}\theta}\leqslant\pi m\lambda_p,$$

所以 $\sum\lambda_n\sin n\theta\sin m\theta$ 在 $\langle 0,\pi\rangle$ 上一致收敛，且其和为

$$g(\theta)\sin m\theta.$$

因此

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(\theta)\sin m\theta\,d\theta=\lambda_m.$$

(ii) 同样用 (3.6.5) 的第二个不等式，我们看到

$$\frac{1}{2}\lambda_0(1-\cos m\theta)+\sum\lambda_n\cos n\theta(1-\cos m\theta)$$

一致收敛于 $f(\theta)(1-\cos m\theta)$，所以

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\theta)\,d\theta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\theta)\cos m\theta\,d\theta=\lambda_0-\lambda_m.$$

令 $m\to\infty$，用定理 30，我们看到（先对 $m=0$，然后对一般的 m）λ_m 是 f 的 m 阶 Fourier 常数．

定理 47. 设

$$A=\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n}<\infty, \tag{3.10.1}$$

则 C 和 S 为 Fourier 级数. 对于 S, 这个条件也是必要的.

设 $A_k=\frac{1}{2}\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_k$, 则

$$\sum_1^\infty \frac{A_k}{k(k+1)}=\frac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^\infty \frac{1}{k(k+1)}\sum_1^k \lambda_m$$

$$=\frac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^\infty \lambda_m\sum_m^\infty \frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lambda_0+A.$$

所以, 假如 $\pi/(k+1)\leqslant\theta<\pi/k$ 和 $h=f+ig$, 则有

$$h=\frac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^\infty \lambda_n e^{ni\theta}=\frac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^{k-1}\lambda_n e^{ni\theta}+\sum_k^\infty \lambda_n e^{ni\theta},$$

$$|h|\leqslant A_k+\frac{\lambda_k}{\sin\frac{1}{2}\theta}\leqslant A_k+\frac{\pi\lambda_k}{\theta}\leqslant A_k+(k+1)\lambda_k,$$

$$\int_0^\pi |h|\,d\theta=\sum_1^\infty \int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k}|h|\,d\theta$$

$$\leqslant\sum_1^\infty \frac{\pi}{k(k+1)}\{A_k+(k+1)\lambda_k\}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}\lambda_0+2A\right).$$

假如 g 属于 L, 则由定理 46 和 (3.8.1) 得到 $A<\infty$. 下面的定理表示当 $A=\infty$ 时 C 也可以是 Fourier 级数.

定理 48. 假如 λ_n 是凸的, 则 f 是 $\geqslant 0$ 的与可积的, 且 C 为 f 的 Fourier 级数.

此时 $\lambda_n\geqslant 0$, $\Delta\lambda_n\geqslant 0$, 和 $\Delta^2\lambda_n\geqslant 0$. 作两次和差变换, 利用 (3.6.1) 和 (3.6.3) 得到, 当 $0<\theta<2\pi$ 时,

$$C_n(\theta)=\frac{1}{2}\lambda_0+\lambda_1\cos\theta+\cdots+\lambda_n\cos n\theta$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\lambda_k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta+\lambda_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_k\{1-\cos(k+1)\theta\}$$

$$+\Delta\lambda_{n-1}\frac{1-\cos n\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}+\lambda_n\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

最后两项当 $n\to\infty$ 时趋向于 0，因而

$$f(\theta)=\frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\sum_0^\infty\Delta^2\lambda_n\{1-\cos(n+1)\theta\}$$

是一个正项级数．所以 $f(\theta)\geqslant 0$，且由(3.6.4)和(3.6.8)得到

$$\int_0^\pi f(\theta)\,d\theta=\frac{1}{4}\sum_0^\infty\Delta^2\lambda_n\int_0^\pi\frac{1-\cos(n+1)\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi\sum_0^\infty(n+1)\Delta^2\lambda_n=\frac{1}{2}\pi\lambda_0.$$

因此

(3.10.2) $$\sum_0^\infty\frac{\cos n\theta}{\log(n+2)}\quad\left(\text{或}\sum_2^\infty\frac{\cos n\theta}{\log n}\right)$$

是一个 Fourier 级数．定理 47 表明相应的正弦级数就不是 Fourier 级数，因为 $\sum(n\log n)^{-1}$ 是发散的．这些例子特别重要，因为它们表明**一个 Fourier 级数的共轭级数不一定是 Fourier 级数**．

3.11 具有递降系数的级数(续)　粗略地说，§3.10 中的定理关系着 f 和 g 的可积性，另外还有一些关系到它们的有界性

和连续性的定理.

假如一个三角级数是一致(有界)收敛的，则其和为连续(有界). 我们将在§6.3中证明当级数具有正系数时逆命题亦真，因此，对于这种级数，级数的一致(有界)收敛等价于其和的连续(有界)；特别，对于我们现在的级数C和S这是真的. 从而推得，假如f为有界，则$\sum\lambda_n$收敛，且此时C一致收敛而f为连续. 关于S和g有更多的可说，我们将在§6.3独立地阐明它.

定理 49. 设S的和为连续(有界)，则S为一致(有界)收敛. 条件

$$\lambda_n = o(n^{-1}) \quad [\lambda_n = O(n^{-1})] \tag{3.11.1}$$

对于S的一致(有界)收敛性或者对于S的和的连续性(有界)都是必要与充分的.

我们只证明关于连续性的一部分，关于有界性部分*)，证明相类似且更为简单. 我们只要证明(3.11.1)对于一致收敛性是充分的而对于连续性是必要的.

(i) 假设$\lambda_n = o(n^{-1})$和$k=[\pi/\theta]$. 我们选择N使当$n\geqslant N$时$|n\lambda_n|<\varepsilon$，并取$q>p\geqslant N$. 假如$p\leqslant k<q$，则

$$U=\sum_p^q \lambda_n \sin n\theta = \sum_p^k + \sum_{k+1}^q = U_1+U_2,$$

$$|U_1| \leqslant \theta \sum_p^k n\lambda_n < k\theta\varepsilon \leqslant \pi\varepsilon,$$

$$|U_2| \leqslant \lambda_{k+1} \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\theta \leqslant \pi\lambda_{k+1}/\theta \leqslant (k+1)\lambda_{k+1} < \varepsilon,$$

从而$|U|<(\pi+1)\varepsilon$. 假如$k\geqslant q$或$k<p$，那末对U_1或U_2作同样的考虑也得到一样的结论. 因此在任何情形下，$|U|<(\pi+1)\varepsilon$，从而S一致收敛.

---

*) 一部分已经在§3.7中加以证明.

(ii) 假如当 $\theta\to 0$ 时 $g\to 0$, 则

$$\sum \frac{\lambda_n}{n}(1-\cos n\theta)=\int_0^\theta g(t)\,dt=o(\theta).$$

但当 $\theta=\pi/k$ 时, 由(3.6.6)知道这个和至少是

$$\sum_{\frac{1}{2}k}^{k}\frac{\lambda_n}{n}(1-\cos n\theta)\geqslant\frac{2\theta^2}{\pi^2}\sum_{\frac{1}{2}k}^{k}n\lambda_n$$

$$\geqslant\frac{2\theta^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{2}k\right)^2\lambda_k=\frac{1}{2}\lambda_k.$$

因此 $$\lambda_k=o(\theta)=o(k^{-1}).$$

3.12 Gibbs 现象 设 $s_n(\theta)$ 是 f 的 Fourier 级数的部分和, 所谓 f 在 ξ 处的 Gibbs 集是指, $n\to\infty$ 而 θ 经过适当的数列趋于 ξ 时, $s_n(\theta)\to c$ 的 c 值全体. 我们也可以定义为

$$\lim s_n(\xi+h_n)=c$$

的 c 值全体, 其中 (h_n) 为使 $h_n\to 0$ 和 $nh_n\to a$ 而 $-\infty\leqslant a\leqslant\infty$ 的数列. 显然, 从定理 30 和连续性的考虑, Gibbs 集是一个有限的或无限的区间 $\langle\eta_1, \eta_2\rangle$.

特别, 假若 f 在包含 ξ 的区间内除掉 ξ 而外是连续的, 在 ξ 这点有跳跃 $d=f(\xi+0)-f(\xi-0)$, 而

$$f(\xi)=\frac{1}{2}\{f(\xi+0)+f(\xi-0)\},$$

f 的 Fourier 级数在此区间内收敛于 f, 则

$$-\infty\leqslant\eta_1\leqslant\underline{f}<\overline{f}\leqslant\eta_2\leqslant\infty,$$

其中 $\underline{f}$ 和 $\overline{f}$ 表示 $f(\xi\pm 0)$ 中的小者和大者. 很自然地会希望 η_1 和 η_2 刚好是 $\underline{f}$ 和 $\overline{f}$, 但我们将看到, 即使在最简单的情形也未必如此.

我们首先考虑特殊级数 S, 此时 f 即为(3.7.2)的 f 而 $\xi=0$,

$$f(\xi-0)=-\frac{1}{2}\pi,\ f(\xi+0)=\frac{1}{2}\pi,\ d=\pi.$$

我们不妨假设 h_n 是正的. 于是

$$(3.12.1)\quad s_n(h_n)=\sum_1^n \frac{\sin mh_n}{m}=\int_0^{h_n}\left(\sum_1^n \cos m\theta\right)d\theta$$
$$=\int_0^{h_n}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}d\theta-\frac{1}{2}h_n$$
$$=\int_0^{h_n}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\theta}d\theta$$
$$+\int_0^{h_n}\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}-\frac{1}{\theta}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\,d\theta$$
$$-\frac{1}{2}h_n.$$

最后两项趋于 0 (第二项趋于 0 是由于定理 31), 而当 $nh_n\to a$ 时,

$$(3.12.2)\quad \int_0^{h_n}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\theta}d\theta=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)h_n}\frac{\sin t}{t}dt\to\int_0^a\frac{\sin t}{t}dt.$$

最后一个积分是正的(除掉 $a=0$), 它在 $a=(2k+1)\pi$ 时取极大, 在 $a=2k\pi$ 时取极小; 又在 $a=\infty$ 时是 $\frac{1}{2}\pi$. 它的绝对极大值为

$$(3.12.3)\qquad G=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=1.85>\frac{1}{2}\pi.$$

因此 f 的 Gibbs 集是以原点为中心的一个长为 $2G>\pi$ 的区间.

转到一般情形, 我们记

$$(3.12.4)\quad g(\theta)=f(\theta)-\frac{d}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\sin n(\theta-\xi)}{n}=f(\theta)-\frac{d}{\pi}\mathrm{f}(\theta-\xi),$$

从而

$$g(\xi)=f(\xi)=\frac{1}{2}\{f(\xi+0)+f(\xi-0)\}.$$

于是

$$g(\xi\pm 0)=f(\xi\pm 0)\mp\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}\{f(\xi+0)+f(\xi-0)\}=g(\xi),$$

因而 g 在 ξ 连续. 现在假设, 如最简单情形所遇到的, g 的 Fourier 级数在 ξ 的一个邻域内一致收敛. 则对于 g, $s_n(\xi+h_n)\to g(\xi)$, 而 g 的 Gibbs 集由这一点所组成. 从而对 f 而言, 当 $h_n\to 0$ 和 $nh_n\to a$ 时,

$$s_n(\xi+h_n)\to\frac{1}{2}\{f(\xi+0)+f(\xi-0)\}$$
$$+\frac{f(\xi+0)-f(\xi-0)}{\pi}\int_0^a\frac{\sin t}{t}dt,$$

而 f 的 Gibbs 集是一个以 $\frac{1}{2}\{f(\xi+0)+f(\xi-0)\}$ 为中心长为 $2dG/\pi$ 的区间.

我们在 §6.7 中还要讨论这个题目.

IV. Fourier 级数的收敛性

4.1 引言 关于特殊类型的函数的 Fourier 级数的收敛问题我们已经证明了一两个定理. 在本章中我们将对收敛问题作系统的研究.

先给一个初步的注释是适宜的. "收敛问题"初看起来是理论的中心问题和最自然的问题, 并且它是最先被认真讨论的, 但在以后的研究中却失去了很多重要性. 一个级数可以在很多意义下"收敛", 而 Cauchy 的古典意义只是其中之一; 又有些收敛意义, 如第 II 章的"强收敛"和第 V 章的"求和法"同生成函数的最明显的特征有着更自然的联系.

我们以 $s_n(\theta)$ 或 $s_n(\theta, f)$ 表示 $T(f)$ 的部分和. 写

$$(4.1.1) \qquad \phi(t)=\phi(\theta,\ t)=\frac{1}{2}\{f(\theta+t)+f(\theta-t)\}.$$

当 $\phi(+0)$ 存在的时候(例如, 在连续点和跳跃点), $T(f)$ 的"自然"和为 $\phi(+0)$. 作为 t 的函数 $\phi(t)$ 的 Fourier 常数由定理 26 可知为 $A_n(\theta)$ 和 0; 而 $f(t)$ 在 $t=\theta$ 的 Fourier 级数就是 $\phi(t)$ 在 $t=0$ 的 Fourier 级数, 后者是余弦级数. 这个注释使我们能够把 Fourier 级数在点 θ 的收敛问题归结到一个余弦级数在点 $\theta=0$ 的特殊情形.

4.2 Fourier 级数的收敛问题 我们有

$$(4.2.1) \qquad s_n(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos m(t-\theta)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(t-\theta)}\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(\theta,\ t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(\theta,\ t)\,D_n(t)\,dt,$$

其中 $D_n(t)$ 是在 (3.6.1) 中定义过的"Dirichlet 核". 特别当 $f(t)=c$ 时, 对一切 n, $s_n(\theta)=c$; 于是由 (4.2.1) 减去 c 得到

$$s_n(\theta)-c=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g_c(t)\,D_n(t)\,dt, \tag{4.2.2}$$

其中

$$g_c(t)=\phi(\theta,\ t)-c=\frac{1}{2}\{f(\theta+t)+f(\theta-t)-2c\}. \tag{4.2.3}$$

此地 c 可能依赖于 θ.

定理 50. 要使得 $f(t)$ 的 Fourier 级数当 $t=\theta$ 时收敛于 c, 其充要条件是

$$J=J(\delta,\ c,\ \lambda)=\int_0^{\delta}g_c(t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\to 0, \tag{4.2.4}$$

其中 $g_c(t)$ 由 (4.2.3) 定义, δ 为固定, $0<\delta<\pi$*⁾, 而 λ 是一个趋向于无穷大的连续参数. 设 E 是使 $c=c(\theta)$ 为有界的点集, 要使级数在 E 上一致收敛, 或者使部分和一致有界, 其充要条件是 J 在 E 上一致收敛于 0 或者是一致有界.

根据 (4.2.2), $s_n(\theta)-c$ 等于

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}g\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt+\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}g\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}g\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

---

*⁾ 今后假若在一个定理中出现具有这种性质的 δ 时, 我们就设想它是很小的, 并且将不注以 $0<\delta<\pi$. $g_c(t)$ 以后常写成 $g(t)$ 或简单地写作 g.

由定理 31，最后两个积分是 $o(1)$，并且在使 $c=c(\theta)$ 为有界的任何集上是一致地 $o(1)$. 因此 $s_n \to c$ 等价于 $J\left(\delta, c, n+\frac{1}{2}\right) \to 0$，而剩下来的只要证明可以将 $n+\frac{1}{2}$ 换以 λ. 但是，假如 $n-\frac{1}{2}<\lambda<n+\frac{1}{2}$ 而

$$\mu=\frac{1}{2}\left(\lambda-n+\frac{1}{2}\right), \quad \nu=\frac{1}{2}\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right),$$

则 $(\sin\mu t)/t$ 在 $(0, \delta)$ 上递降，从而存在一个 $\tau=\tau(\lambda)$，$0<\tau<\delta$，使

$$\begin{aligned}\int_0^\delta g\,\frac{\sin\lambda t-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt &= 2\int_0^\delta g\,\frac{\sin\mu t}{t}\cos\nu t\,dt\\ &= 2\mu\int_0^\tau g\cos\nu t\,dt;\end{aligned}$$

最后的积分在使 c 为有界的任何集上是一致地 $o(1)$.

象此地一样，以后时常会遇到这样的情况，即对有关 $s_n(\theta)$ 收敛问题的主要定理可补充以有关一致收敛性和有界性的定理；例如，当定理的条件在一个使 $c(\theta)$ 为有界的区间中一致成立时，收敛成为一致收敛. 我们以后对这些补充语一般不给出完全的证明，有时也不再明显地叙述.

定理 51. 为要 $s_n(\theta)\to c$ 成立，充分条件是应该有一个 $\eta=\eta(\varepsilon)$ 和一个 $\Lambda=\Lambda(\varepsilon)$，使得当 $\lambda\geqslant\Lambda$ 时 $|J(\eta, c, \lambda)|<\varepsilon$.

因为此时

$$|J(\delta, c, \lambda)|<\varepsilon+\left|\int_\eta^\delta g\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right|,$$

从而由定理 31，得到

$$\overline{\lim}\,|J(\delta, c, \lambda)|\leqslant\varepsilon+\lim\left|\int_\eta^\delta g\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right|=\varepsilon.$$

最后给出通常称为"Riemann 局部性定理"来结束本节.

定理 52. 当 $n\to\infty$ 时，$s_n(\theta)$ 的性态只依赖于 $f(t)$ 在 θ 近旁

的性态.

这自然包含在定理 50 和 51 之中，因为 δ 是任意的，而 f 在 $(\theta-\delta, \theta+\delta)$ 之外的数值是没有影响的.

4.3 在一点的连续条件 我们将发现，一般的收敛判别法含有两种类型的条件，其一为“连续条件”，在不同的判别法中变化不大，另一种是随判别法而不同的较尖锐的条件.

设函数 $h(t)$ 只定义于 $t>0$，假如 $h(t)$ 趋向于极限 $h(+0)$，则称 $h(t)$ “在 $t=0$ 连续”；因此我们可以定义 $h(0)$ 为 $h(+0)$. 当 $h(t)$ 在一个零集上改变时，这种意义下的连续性可能被破坏，但这样的改变并不影响函数的 Fourier 级数. 因此在这个理论中，自然要去考虑更一般形式的连续性. 我们此地考虑两种扩充意义下的 $h(t)$ 的“趋向于 0”.

假如当 $t\to 0$ 时，

$$H(t)=\int_0^t h(u)du=o(t), \tag{4.3.1}$$

我们称 $h(t)$ 平均地 $\to 0$. 假如 $|h(t)|$ 平均地 $\to 0$，即假如

$$H^*(t)=\int_0^t |h(u)|du=o(t), \tag{4.3.2}$$

则称 $h(t)$ 强平均 $\to 0$. 显然 (4.3.2) 含有 (4.3.1)，但反之不真.

应用到 Fourier 级数，$h(t)$ 取为由 (4.2.3) 所定义的 $g_c(t)$. 假如对于某个 $c(\theta)$，$h(t)$ 满足 (4.3.1) 或 (4.3.2)，我们将称 $f(t)$ 对 $t=\theta$ 满足 l_c 或 L_c (这里大写 L 是关于 $|h|$ 的强条件).

显然，$f(t)$ 在连续点或跳跃点必然满足 L_c 从而满足 l_c，其中 $c=\phi(+0)$. 但尚有更多的场合可使上述条件满足. Lebesgue 曾经证得：如果 $f\in L$，又 $\alpha(\theta)$ 是对于几乎一切 θ 为有限的任一函数，则对于几乎一切 θ，

$$\frac{1}{t}\int_0^t |f(\theta+u)-\alpha(\theta)|du\to|f(\theta)-\alpha(\theta)|.$$

特别推得在 $c=f(\theta)$ 时 f 几乎处处满足 L_c(从而满足 l_c)。我们将用 L_f 和 l_f 表示这种特殊情形的 L_c 和 l_c。

假如 h 满足(4.3.1),则

(4.3.3) $$\int_0^{\pi/\lambda} h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt=o(1).$$

因为这个积分是

$$-\int_0^{\pi/\lambda} H(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\lambda t}{t}\right)dt=\int_0^{\pi/\lambda} o(t)O\left(\frac{\lambda}{t}\right)dt=o(1).$$

显然用同样的方法可以证明,假如 a 是任意正常数,则

(4.3.4) $$\int_{\tau_1}^{\tau_2} h(t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt=o(1)$$

对 $0\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant a/\lambda$ 一致地成立.

现在如在(4.3.3)中取 $h=g_c$, 且将此结果与定理 51 合并, 我们得到

定理 53. 设 $f(t)$ 于 $t=\theta$ 满足 l_c, 又设

(4.3.5) $$I(\delta,\ c,\ \lambda)=\int_{\pi/\lambda}^{\delta} g_c(t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt.$$

则 $s_n(\theta)\to c$ 的一个充分条件是: 应该有这样一个 $\eta(\varepsilon)$ 和 $\Lambda(\varepsilon)$,使得当 $\lambda\geqslant\Lambda$ 时 $|I(\eta,\ c,\ \lambda)|<\varepsilon$. 假如 l_c 和关于 I 的条件在使 $c=c(\theta)$ 为有界的集 E 上一致地满足, 则在 E 上一致地成立着 $s_n(\theta)\to c(\theta)$.

因为此时

$$|J(\delta,\ c,\ \lambda)|<\varepsilon+\left|\int_0^{\pi/\lambda} g_c\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right|+\left|\int_\eta^{\delta} g_c\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right|,$$

而由(4.3.3)和定理 31 得到

$$\overline{\lim}\,|J(\delta,\ c,\ \lambda)|\leqslant\varepsilon.$$

4.4 Dini 判别法 Fourier 级数收敛的最简单的判别法是 Dini 的结果.

定理 54. 假如对于某个 c, $t^{-1}g_c(t)\in L$, 则 $s_n(\theta)\to c$. 假如再加上 $t=\theta$ 为连续点或跳跃点, 则 c 一定是 $f(\theta)$ 或 $\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$.

这是定理 51 的一个直接推论, 因为可选择 η 使 $|J|<\varepsilon$. 本定理也可直接由公式(4.2.2)推导出来.

作为更特殊的推论, 我们有

定理 55. 若对 $\alpha>0$,

$$f(\theta+t)-f(\theta)=O(|t|^{\alpha}), \tag{4.4.1}$$

则 $f(t)$ 的 Fourier 级数在 $t=\theta$ 处收敛于 $f(\theta)$. 特别, 当 $f'(\theta)$ 存在(为有限数)时这是正确的. 若 $f(t)$ 在 θ 的一个闭区间上一致地满足条件(4.4.1), 则级数在该区间上一致收敛.

4.5 有界变差函数: Jordan 判别法

下面是关于 V 中函数的一些定理, 我们需要一个预备的不等式. 设 h 是 V 中一函数, $h(+0)=0$, 用 $V_h(t_1, t_2)$ 表示 h 在开区间 (t_1, t_2) 的全变差, 则

$$\left|\int_{\tau}^{\delta} h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right|\leqslant HV_h(0,\ \delta)\quad (0\leqslant\tau\leqslant\delta). \tag{4.5.1}$$

我们可以把 h 写成 $h=h^{+}-h^{-}$, 其中 h^{+} 和 h^{-} 分别是 h 在 $(0,\ t)$ 上的正变差和负变差; h^{+} 和 h^{-} 是增加函数, 且 $h^{+}\geqslant 0$, $h^{-}\geqslant 0$, $h^{+}(+0)=h^{-}(+0)=0$, 以及 $h^{+}+h^{-}=V_h(0,\ t)$. 于是

$$\left|\int_{\tau}^{\delta} h^{+}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| = \left|h^{+}(\delta-0)\int_{\tau'}^{\delta}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right|$$

$$= \left|h^{+}(\delta-0)\int_{\tau'\lambda}^{\delta\lambda}\frac{\sin u}{u}\,du\right|,$$

其中 $\tau<\tau'<\delta$; 上式并不超过 $HV_h(0,\ \delta)$. 同理可以用于 h^{-}, 从而推得(4.5.1).

定理 56. 若 $\phi(t)$ 在 $(0,\ \delta)$ 上属于 V, 则 $s_n(\theta)\to\phi(+0)$. 特

别，如果 $f(t)$ 在一个包含 θ 的区间上属于 V，则 $f(t)$ 的 Fourier 级数在 $t=\theta$ 处收敛于 $\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$.

这是 Jordan 判别法. 本定理由定理 51 和(4.5.1)立即可得，因为当 $h=g_c, c=\phi(+0)$而 η 足够小时 $|J(\eta, c, \lambda)|\leqslant HV_h(0, \eta)<\varepsilon$.

一致收敛或有界收敛的判别法在此地更为重要，今分别叙述如下.

定理 57. 若 f 在(a, b)上属于 V，则其 Fourier 级数在(a, b)的任意内闭区间 $\langle a', b'\rangle$ 上有界收敛于 $\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$. 若 f 在(a, b)上还是连续的，则级数在$\langle a', b'\rangle$上一致收敛于 $f(\theta)$.

若 θ 属于 $\langle a', b'\rangle$，则当 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 时 (δ 足够小)，$\theta+t$ 也属于 (a, b)，又当 $h=g_c$ 和 $c=\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$ 时 $V_h(0, \delta)\leqslant V_f(a, b)$. 于是由(4.5.1)及定理 50 推得定理的第一部分.

假若 f 还是连续的，我们取 $h=g_c$ 和 $c=f(\theta)$. 可以选取一个与 θ 无关的 $\delta(\varepsilon)$，使得对 $\langle a', b'\rangle$ 的一切 θ 有 $V_h(0, \delta)<\varepsilon$; 这就证明了定理的第二部分. 本定理包含定理 45.

应该看到这一节的判别法和 § 4.4 的 Dini 判别法有着基本的差别. Dini 判别法是一种严格的点判别法，它只告诉我们在点 $t=\theta$ 处级数是收敛的. 但若 f 在包含 $t=\theta$ 的一个区间上为有界变差，则 f 在包含任何邻近点的某个区间上亦属于 V，从而这个级数在包含 $t=\theta$ 的某区间上为有界收敛.

若 ξ 是 V 中函数 f 的一个孤立不连续点，则(3.12.4)中 g 的 Fourier 级数在靠近 ξ 处是一致收敛的，因此，由 § 3.12, f 的 Fourier 级数在 ξ 处呈现 Gibbs 现象.

定理 57 给出定理 43 和 44(因而得到三角函数系的完备性)的另一证明. 因为 $F(\theta)$ 为绝对连续，从而自然是连续的并且是有界变差的，所以它的 Fourier 级数

$$\frac{1}{2}A_0-\sum n^{-1}(b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta)$$

为一致收敛．置 $\theta=0$，得到 $A_0=2\sum n^{-1}b_n$.

4.6 Lebesgue 判别法 我们最后介绍的是由 Lebesgue 首先给出但经 Gergen 改善的判别法．

定理 58．*若 f 于 $t=\theta$ 满足 l_c，又对某个固定的 δ，当 $h\to+0$ 时，*

$$\int_h^\delta\frac{|\phi(t+h)-\phi(t)|}{t}dt\to0,\tag{4.6.1}$$

则 $s_n(\theta)\to c$.

应该看到在(4.6.1)中的 ϕ 可以换以 g_c，因为 $g_c(t+h)-g_c(t)$ 与 c 无关．

由定理 53，只要证明

$$I=I(\delta,\ c,\ \lambda)=\int_h^\delta\frac{g(t)}{t}\sin\lambda t\,dt=o(1),$$

这里 $h=\pi/\lambda$．我们可以改变 I 的上限为 $\delta+h$，下限为 $2h$，而只差一个误差 $o(1)$；第一个改变是显然的，又第二个改变可由(4.3.4)验证．然后写 $t+h$ 代替 t，得到

$$I=-\int_h^\delta\frac{g(t+h)}{t+h}\sin\lambda t\,dt+o(1).$$

将 I 的两个表达式相加，就推得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_h^\delta\left\{\frac{g(t)}{t}-\frac{g(t+h)}{t+h}\right\}\sin\lambda t\,dt+o(1)\\&=\frac{1}{2}\int_h^\delta\frac{g(t)-g(t+h)}{t+h}\sin\lambda t\,dt\\&\quad+\frac{1}{2}h\int_h^\delta\frac{g(t)}{t(t+h)}\sin\lambda t\,dt+o(1).\end{aligned}\tag{4.6.2}$$

此地由(4.6.1)，第一项不超过

$$\frac{1}{2}\int_h^\delta\frac{|g(t+h)-g(t)|}{t}dt=o(1),$$

因此只要证明

(4.6.3)
$$P=\int_h^\delta \frac{g(t)}{t(t+h)}\sin\lambda t\,dt=o(\lambda).$$

今设

(4.6.4)
$$P=\left(\int_h^{2h}+\int_{2h}^\delta\right)\frac{g(t)}{t(t+h)}\sin\lambda t\,dt=P_1+P_2,$$

于此

$$P_1=\frac{1}{2h}\int_h^\tau \frac{g(t)}{t}\sin\lambda t\,dt,$$

其中 $h<\tau<2h$，所以由(4.3.4)，P_1 是 $o(h^{-1})=o(\lambda)$. 又

$$P_2=\int_{2h}^\delta \frac{g(t)}{t(t+h)}\sin\lambda t\,dt=-\int_h^{\delta-h}\frac{g(t+h)}{(t+h)(t+2h)}\sin\lambda t\,dt,$$

而且以 δ 代替 $\delta-h$ 时误差为 $o(1)$. 假如我们已作这个代换，代入(4.6.4)，记住 $P_1=o(\lambda)$，然后取 P 的两个表达式的平均，就得到

$$P=\frac{1}{2}\int_h^\delta\left\{\frac{g(t)}{t(t+h)}-\frac{g(t+h)}{(t+h)(t+2h)}\right\}\sin\lambda t\,dt+o(\lambda)$$
$$=P_3+hP_4+o(\lambda),$$

其中

$$P_3=\frac{1}{2}\int_h^\delta \frac{g(t)-g(t+h)}{(t+h)(t+2h)}\sin\lambda t\,dt,$$

$$P_4=\int_h^\delta \frac{g(t)}{t(t+h)(t+2h)}\sin\lambda t\,dt.$$

此地，由(4.6.1)，

$$|P_3|\leqslant\frac{1}{6h}\int_h^\delta \frac{|g(t+h)-g(t)|}{t}\,dt=o(\lambda).$$

因此只要证明 $P_4=o(\lambda^2)$ 就足够了.

现在假设象§4.3中定义 $H(t)$ 那样来定义 $G(t)$，则

$$\int_h^\delta \frac{g(t)}{t(t+h)(t+2h)}\sin\lambda t\,dt$$
$$=\frac{G(\delta)\sin\lambda\delta}{\delta(\delta+h)(\delta+2h)}-\int_h^\delta G(t)\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sin\lambda t}{t(t+h)(t+2h)}\right\}dt,$$

这里积分出来的项是 $O(1)$. 又因 f 满足 l_c, 故 $G(t)=o(t)$, 并且

$$\left|\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sin\lambda t}{t(t+h)(t+2h)}\right\}\right|<H\left(\frac{\lambda}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right).$$

所以最后一个积分是

$$o\left(\lambda\int_h^\delta\frac{dt}{t^2}\right)+o\left(\int_h^\delta\frac{dt}{t^3}\right)=o(\lambda^2);$$

从而完成了定理的证明.

定理 58 的证明颇费周折. 假如我们取

$$\int_h^\delta\left|\frac{g_c(t+h)}{t+h}-\frac{g_c(t)}{t}\right|dt\to 0 \tag{4.6.5}$$

作为假设来代替(4.6.1),那末由(4.6.2)的第一行就得到 $I\to 0$. 这个假设只能对 c 的一个值被满足, 可以证明这个假设包含着 L_c, 当然也包含 l_c, 从而(4.6.5)自身是收敛的一个充分条件.

4.7 一致收敛的其它判别法 到现在为止, Lebesgue 判别法是范围最广的收敛判别法; 例如可以证明它包含 Dini 判别法和 Jordan 判别法. 它虽然有着很大的广泛性, 但是它的缺点是条件不够明朗化, 它不具有 f 的任何自然特征.

不难由定理 58 推得一个关于一致收敛的有趣的判别法.

定理 59. 若在一个开区间内一致地成立着

$$|f(\theta+h)-f(\theta)|=o\left(\log\frac{1}{|h|}\right)^{-1}, \tag{4.7.1}$$

则 Fourier 级数在这个区间的任一内闭区间上一致收敛于 $f(\theta)$.

由于 f 一致地满足 l_f, 又 (设 h 是正的) 在任何内闭区间上一致地成立着

$$\int_h^\delta\frac{|g_c(t+h)-g_c(t)|}{t}dt=o\left\{\left(\log\frac{1}{h}\right)^{-1}\int_h^\delta\frac{dt}{t}\right\}=o(1).$$

这个定理特别有趣, 因为如果 (4.7.1) 只对特殊的 θ 成立, 那末 (4.7.1) 还不能保证 Fourier 级数在 θ 处是收敛的.

4.8 共轭级数　对于在 (1.2.9) 和在 §1.3 中定义的"共轭级数" $\widetilde{T}(f)$ 而言，有着类似于以上各节中所证明的定理．应当记住，如在 §3.10 中我们已看到，共轭级数本身不一定是 Fourier 级数，又即使它是 Fourier 级数，我们需要的是用 f 来表达的它的收敛判别法．

我们记 $\widetilde{T}(f)$ 的部分和为 $\tilde{s}_n(\theta)$ 或 $\tilde{s}_n(\theta, f)$．写着

$$\psi(t)=\psi(\theta, t)=f(\theta+t)-f(\theta-t), \tag{4.8.1}$$

则由定理 26，$\psi(t)$ 的 Fourier 常数为 0 和 $2B_n(\theta)$；又当 $t=\theta$ 时，$f(t)$ 的共轭级数就是 $\frac{1}{2}\psi(t)$ 在 $t=0$ 的共轭级数，$\frac{1}{2}\psi(t)$ 的共轭级数是一个余弦级数．

什么是 $\widetilde{T}(f)$ 的"天然的"和，这不是一望而知的．我们将看到它是

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(\theta, t)\cot\frac{1}{2}t\,dt\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\psi(\theta, t)\cot\frac{1}{2}t\,dt,\end{aligned} \tag{4.8.2}$$

这里积分在原点通常是"Cauchy 积分"．这个积分本身在这一意义下是否存在是一个问题，有关这个问题将在第 VI 章中再讨论．在本章中我们只考虑以下的差：

$$\begin{aligned}\tilde{d}_n(\theta)&=\tilde{s}_n(\theta)-\tilde{f}_n(\theta)\\&=\tilde{s}_n(\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\psi(\theta, t)\cot\frac{1}{2}t\,dt,\end{aligned} \tag{4.8.3}$$

而不考虑 $\tilde{f}(\theta)$ 或 $\tilde{s}_n(\theta)$．我们会发现，对应于每一个 $s_n(\theta)$ 的收敛判别法，有一个 $\tilde{d}_n(\theta)$ 的收敛判别法；如果再加上 $\tilde{f}(\theta)$ 的存在性，那末 $\tilde{f}_n(\theta)$ 将趋向于 $\tilde{f}(\theta)$，从而得到 $\widetilde{T}(f)$ 的一个收敛判别法．

显然，$\tilde{f}(\theta)$ 在 $f(\theta)$ 的跳跃点上是不可能存在的．我们将看到在这种点上 $\tilde{d}_n(\theta)$ 的"天然"极限是 βd，其中

$$\beta=(\gamma+\log\pi)/\pi, \tag{4.8.4}$$

γ 为 Euler 常数，$d=\psi(+0)$ 是跳跃．例如，于 $\theta=0$ 处考虑级数

(4.8.5) $T(\theta)=\sin\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta+\cdots,\quad \tilde{T}(\theta)=\cos\theta+\frac{1}{3}\cos 3\theta+\cdots.$

此时由 (3.7.4)，$f(\theta)=\frac{1}{4}\pi\operatorname{sgn}\theta\ (-\pi<\theta<\pi)$. 因而 $\phi(t)=0$，而 $\psi(t)=\frac{1}{2}\pi(0<t<\pi)$. 很明显，$T(0)$收敛于 $\phi(+0)=0$. 又

(4.8.6) $\tilde{s}_n(0)=\sum_{2m+1<n}\frac{1}{2m+1}=\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\gamma+o(1),$

而

$$\tilde{f}_n(0)=\frac{1}{4}\int_{\pi/n}^{\pi}\cot\frac{1}{2}\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\log\sin\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{2}\log\frac{2}{\pi}+o(1),$$

所以

$$\tilde{d}_n(0)\to\frac{1}{2}(\gamma+\log\pi)=\beta d.$$

常数 β 没有特别的意义，其值决定于(4.8.3)中积分下限是否取为 π/n. 如取为 a/n，那末 β 就成为 $(\gamma+\log a)/\pi$.

4.9 共轭级数的收敛问题 共轭级数的讨论与 Fourier 级数相似，但较为复杂，这是由于 $\tilde{s}_n(\theta)$ 及 $\tilde{d}_n(\theta)$ 间的区别以及 $\tilde{s}_n(\theta)$在跳跃点的发散性. 此地

(4.9.1)
$$\begin{aligned}\tilde{s}_n(\theta)&=\sum_1^n B_m(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_1^n\sin m(t-\theta)\,dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)\sum_1^n\sin mt\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(\theta,\ t)\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(\theta,\ t)\cot\frac{1}{2}t(1-\cos nt)\,dt\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(\theta,\ t)\sin nt\,dt.\end{aligned}$$

最后一项为 $o(1)$. 特别, 如 $T(\theta)$ 是(4.8.5)中的级数及 $\theta=0$, 则 $\psi=\frac{1}{2}\pi$ 而 $\tilde{s}_n(0)$ 由(4.8.6)给出; 所以

$$(4.9.2)\quad \frac{1}{2}\log 2n+\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cot\frac{1}{2}t(1-\cos nt)dt+o(1).$$

设 $d=d(\theta)$, 以 $2d/\pi$ 乘(4.9.2), 再从(4.9.1)减去之, 记

$$(4.9.3)\quad \tilde{g}_d(t)=\psi(\theta,t)-d=f(\theta+t)-f(\theta-t)-d,$$

则得到

$$(4.9.4)\quad \tilde{s}_n(\theta)-\frac{d}{\pi}(\log 2n+\gamma)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\tilde{g}_d(t)\cot\frac{1}{2}t(1-\cos nt)dt+o(1).$$

因此, 如果 $\tilde{d}_n(\theta)$ 由 (4.8.3) 定义, 就有

$$\tilde{d}_n(\theta)-\frac{d}{\pi}(\log 2n+\gamma)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/n}\tilde{g}\cot\frac{1}{2}t(1-\cos nt)dt$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\tilde{g}\cot\frac{1}{2}t\cos nt\,dt-R-o(1),$$

其中

$$R=\frac{d}{2\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\cot\frac{1}{2}t\,dt=-\frac{d}{\pi}\log\sin\frac{\pi}{2n}$$
$$=\frac{d}{\pi}(\log 2n-\log\pi)+o(1);$$

所以

$$(4.9.5)\quad \tilde{d}_n(\theta)-\beta d=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/n}\tilde{g}\cot\frac{1}{2}t(1-\cos nt)dt$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\tilde{g}\cot\frac{1}{2}t\cos nt\,dt+o(1).$$

我们可以如同讨论 §4.2 中的 (4.2.2) 一样来讨论 (4.9.5), 而把 π 换以 δ, $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t$ 换以 $\frac{1}{t}$ 以及 n 换以连续的 λ. 这样, 我们得到

定理 60. 要使

$$\tilde{d}_n(\theta)\to\beta d, \tag{4.9.6}$$

其充要条件是：存在一个固定的 δ，当 $\lambda\to\infty$ 时，

$$\tilde{J}=\tilde{J}(\delta,\ d,\ \lambda)=\int_0^{\pi/\lambda}\tilde{g}_d(t)\ \frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt-\int_{\pi/\lambda}^{d}\tilde{g}_d(t)\ \frac{\cos\lambda t}{t}\,dt\to 0. \tag{4.9.7}$$

下列条件是充分的：假如对应于每一个正数 ε，有 $\eta=\eta(\varepsilon)$ 与 $\Lambda=\Lambda(\varepsilon)$，使得当 $\lambda\geqslant\Lambda$ 时，$|\tilde{J}(\eta,\ d,\ \lambda)|<\varepsilon$.

我们可以加上一些条件使得 $\tilde{d}_n(\theta)$ 在使 $d=d(\theta)$ 有界的集上为一致收敛或一致有界；但有关共轭级数的一致性问题留给读者.

$\tilde{d}_n(\theta)$ 的收敛性如同 s_n 那样只依赖于靠近 θ 处 f 的函数值，从而 $\tilde{s}_n$ 的收敛性也是这样；但 $\tilde{f}$ 的值与 $\tilde{T}(f)$ 的和自然依赖于 f 的一切值.

4.10 共轭级数的收敛判别法

还有一些对应于 §4.3 的命题以及相应于 §§ 4.4 到 4.5 的种种判别法.

如同在 § 4.3 定义 l_c 和 L_c 那样，取 $h=\tilde{g}_d$ 可以定义 $\tilde{l}_d$ 和 $\tilde{L}_d$. 若 h 满足(4.3.1)，则

$$\int_0^{\pi/\lambda}h(t)\,\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt=o(1); \tag{4.10.1}$$

证明与(4.3.3)的证明相似. 于是我们得到

定理 61. 若 $f(t)$ 对 $t=\theta$ 满足 $\tilde{l}_d$，又

$$\tilde{I}(\delta,\ d,\ \lambda)=\int_{\pi/\lambda}^{d}\tilde{g}_d(t)\frac{\cos\lambda t}{t}\,dt, \tag{4.10.2}$$

则 $\tilde{d}_n(\theta)\to\beta d$ 的一个充分条件是：应该有 $\eta(\varepsilon)$ 与 $\Lambda(\varepsilon)$，使当 $\lambda\geqslant\Lambda$ 时 $|\tilde{I}(\eta,\ d,\ \lambda)|<\varepsilon$.

这类似于定理 53（不包含一致收敛的部分）. 类似于定理 54 和 56 的是

定理 62. 若对某个 d, $t^{-1}\tilde{g}_d(t)\in L$, 则

$$\tilde{d}_n(\theta)\to\beta d,\ \tilde{s}_n(\theta)-\frac{d}{\pi}(\log 2n+\gamma)\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\tilde{g}_d(t)\cot\frac{1}{2}t\,dt.$$

若 $t=\theta$ 为一跳跃点, d 必为 $f(\theta+0)-f(\theta-0)$. 若 $t=\theta$ 为一连续点, d 必为 0; 于是 $\tilde{d}_n(\theta)\to 0$ 而 $\tilde{s}_n(\theta)\to\tilde{f}(\theta)$.

定理 63. 若 $\psi(t)$ 在 $(0,\delta)$ 上为有界变差, 则

$$\tilde{d}_n(\theta)\to\beta\psi(+0).$$

又若 $\tilde{f}(\theta)$ 存在, 则 $\psi(+0)=0$ 而 $\tilde{T}(f)$ 收敛于 $\tilde{f}(\theta)$.

定理 62 可由定理 61 推得, 也可以直接由(4.9.5)推得. 定理 63 的证明和定理 56 的证明相似, 但还要用到一个不等式, 就是

$$\left|\int_{\tau}^{\delta}h(t)\frac{\cos\lambda t}{t}\,dt\right|\leqslant HV_h(0,\delta)\quad\left(0<\frac{1}{\lambda}\leqslant\tau\leqslant\delta\right).$$

此外, 还有与定理 58 类似的定理.

这里加上一个将在第 V 章中用到的注. 若

$$\mathrm{H}(t)=\int_0^t\frac{h(u)}{u}\,du$$

依照 Cauchy 意义(关于 0)存在, 则

$$H(t)=\int_0^t h(u)\,du=\int_0^t u\mathrm{H}'(u)\,du=t\mathrm{H}(t)-\int_0^t\mathrm{H}(u)\,du=o(t),$$

因此 $h(t)$ 满足 (4.3.1). 若 $\mathrm{H}(t)$ 依照 Lebesgue 意义存在, 则 $h(t)$ 满足 (4.3.2). 在这些情形下, (4.10.1)可以换成

(4.10.3) $$\int_0^{\pi/\lambda}h(t)\frac{\cos\lambda t}{t}\,dt=o(1).$$

4.11 $s_n(\theta)$ 和 $\tilde{s}_n(\theta)$ 的数量级

条件 L_c 和 $\tilde{L}_d$ 对于 $c=f(\theta)$ 和 $d=0$ 是几乎处处满足的; 但重要的是要知道, 单从这些条件, 关于 $s_n(\theta)$ 和 $\tilde{s}_n(\theta)$ 可以说些什么.

定理 64. 若 f 满足 L_c, 则

(4.11.1) $$s_n(\theta)=o(\log n).$$

若 f 满足 $\tilde{L}_d$, 则

(4.11.2) $$\tilde{s}_n(\theta)\sim(d/\pi)\log n.$$

特别，$s_n(\theta)$和$\tilde{s}_n(\theta)$对于几乎一切θ都是$o(\log n)$.

(1) 置$h=g_c$, $\lambda=n$. 则

$$\left|\int_{\pi/n}^{\pi} h(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right| \leqslant \int_{\pi/n}^{\pi}\frac{|h(t)|}{t}dt \leqslant \frac{H^*(\pi)}{\pi}+\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{H^*}{t^2}dt$$

$$\leqslant O(1)+\int_{\pi/n}^{\pi} o\left(\frac{1}{t}\right)dt = o(\log n).$$

(2) 置$h=\tilde{g}_d$. 则以$\cos nt$代$\sin nt$进行同样的论证得到$\tilde{d}_n(\theta)=o(\log n)$. 并且还有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\psi\cot\frac{1}{2}t\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\tilde{g}_d\cot\frac{1}{2}t\,dt+\frac{d}{2\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\cot\frac{1}{2}t\,dt.$$

相似的论证表明第一个积分为$o(\log n)$，而第二个积分的渐近式为$(d/\pi)\log n$.

(4.11.2)的推论是：(1)共轭级数在跳跃点发散于$\pm\infty$，(2)一个函数当它的Fourier常数为$o(n^{-1})$时不能有跳跃点.

4.12 在连续点的发散性 究竟形如l_c或L_c的连续条件是否本身也是使其Fourier级数收敛的充分条件，这是以前很长时间内没有解决的问题(如果是那样的话，那末我们证明的一些定理就几乎失去了它的全部意义).

定理 65. 存在着函数，它的Fourier级数在连续点是发散的.

我们假设N_r为一个不小于3的奇数，又

$$n_0=1,\ n_r=N_1N_2\cdots N_r,\ a_r>0, \tag{4.12.1}$$

$$\sum a_r<\infty,\ a_r\log N_r\to\infty.$$

例如$a_r=r^{-2}$而$n_r=3^{r^4}$，则所有条件均被满足. 我们在$\langle 0,\pi\rangle$上定义$f(t)$如下：

$$f(0)=0,\ f(t)=a_r\sin n_r t\quad (\pi/n_r\leqslant t\leqslant \pi/n_{r-1}),$$

再设$f(t)$为偶的周期函数. 于是f在$\langle -\pi,\pi\rangle$上连续，而在任何不包含0的部分区间内为有界变差，因此它的Fourier级数在

任何上述区间内为一致收敛. 我们证明它在 0 点是发散的.

为此只要证明当 $k\to\infty$ 时,

$$J(k)=\int_0^\pi f(t)\frac{\sin n_k t}{t}\,dt\to\infty.$$

今

$$J(k)=\sum_1^\infty a_r\int_{\pi/n_r}^{\pi/n_{r-1}}\frac{\sin n_k t\sin n_r t}{t}\,dt=\sum_1^\infty a_r j_r(k)$$
$$=a_k j_k(k)+S(k),$$

其中 $S(k)$ 包含 $r\neq k$ 的一切项. 若 $r\neq k$, 则

$$j_r(k)=\frac{1}{2}\int_{\pi/n_r}^{\pi/n_{r-1}}\frac{\cos|n_k-n_r|t-\cos(n_k+n_r)t}{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^4\varepsilon_j\int_1^{U_j}\frac{\cos u}{u}\,du,$$

其中 ε_j 为 ±1 而 U_j 是下述四数之一:

$$\frac{\pi|n_k-n_r|}{n_r},\quad \frac{\pi|n_k-n_r|}{n_{r-1}},\quad \frac{\pi(n_k+n_r)}{n_r},\quad \frac{\pi(n_k+n_r)}{n_{r-1}}.$$

因为对于一切 r, $n_r/n_{r-1}\geqslant3$, 上述诸数都不小于 $\frac{2}{3}\pi$. 因此 $j_r(k)$ 是一致有界, 从而 $S(k)$ 为有界.

另一方面,

$$j_k(k)=\frac{1}{2}\int_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}}\frac{1-\cos 2n_k t}{t}\,dt=\frac{1}{2}\log N_k-\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{2\pi N_k}\frac{\cos u}{u}\,du,$$

而最后一项为有界. 由 (4.12.1) 推得 $a_k j_k(k)\to\infty$, 从而 $J(k)\to\infty$.

4.13 就范直交系的 Lebesgue 函数 定理 65 是一个更为一般的定理的特殊情形.

设 (ϕ_n) 为一个在 (a, b) 上的实的就范直交系, 又设对此系 $f\sim(c_n)$. f 的 n 阶 Fourier 多项式是

$$s_n(x,f)=\int_a^b f(y)\sum_1^n\phi_m(x)\phi_m(y)\,dy \tag{4.13.1}$$

$$=\int_a^b f(y)\Phi_n(x, y)dy,$$

其中 $\Phi_n(x, y)=\sum_1^n \phi_m(x)\phi_m(y)$. 若 $|f|\leqslant 1$, 则

$$|s_n(x, f)|\leqslant \int_a^b |\Phi_n(x, y)|dy=\rho_n(x). \tag{4.13.2}$$

我们称 $\rho_n(x)$ 为 (ϕ_n) 的 Lebesgue 函数.

定理 66. 若对某个 x, $\overline{\lim}\,\rho_n(x)=\infty$, 则存在着连续函数, 其 Fourier 级数在 x 点是发散的.

假如 $f(y)=\operatorname{sgn}\Phi_n(x, y)$, 则由 (4.13.1) 和 (4.13.2), $s_n(x, f)=\rho_n(x)$. 这个函数是不连续的, 但很明显, 对 f 作适当的连续逼近, 我们可以找到一个连续函数 f_n, 使得

$$|f_n(y)|\leqslant 1, \ s_n(x, f_n)\geqslant \frac{1}{2}\rho_n(x). \tag{4.13.3}$$

我们对每个 n 作这样的逼近. 若有一个 f_n 的 Fourier 级数在 x 为发散, 那末定理就已经证明了. 因此我们假设每一个 f_n 的 Fourier 级数是收敛的, 比如说收敛于 γ_n.

现在我们定义 $F(y)$ 如下:

$$F(y)=\sum \alpha_k f_{n_k}(y), \tag{4.13.4}$$

其中

$$\alpha_k>0, \ \sum_1^\infty \alpha_k<\infty, \ \sum_{k+1}^\infty \alpha_p\leqslant \frac{1}{6}\alpha_k; \tag{4.13.5}$$

例如, 我们可以置 $\alpha_k=7^{-k}$. 于是 F 为连续, 而其 Fourier 级数可由 (4.13.4) 中各项的 Fourier 级数作形式上的和来得到.

用归纳法选取 n_k 如下. 已给 $n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}$, 可以选取 n_k 使

$$\alpha_k\rho_{n_k}\to\infty, \quad \sum_1^{k-1}\alpha_p|\gamma_{n_p}|\leqslant \frac{1}{12}\alpha_k\rho_{n_k}; \tag{4.13.6}$$

又因为

$$s_n\left(x, \sum_1^{k-1}\alpha_p f_{n_p}\right)\to \sum_1^{k-1}\alpha_p\gamma_{n_p},$$

我们可以假设 n_k 这样大，使

$$(4.13.7)\qquad \left|s_{n_k}\left(x,\ \sum_1^{k-1}\alpha_p f_{n_p}\right)\right|\leqslant 2\sum_1^{k-1}\alpha_p|\gamma_{n_p}|\leqslant\frac{1}{6}\alpha_k\rho_{n_k}.$$

同样，由(4.13.2)和(4.13.5)有

$$(4.13.8)\qquad \left|s_{n_k}\left(x,\ \sum_{k+1}^{\infty}\alpha_p f_{n_p}\right)\right|\leqslant\rho_{n_k}\sum_{k+1}^{\infty}\alpha_p\leqslant\frac{1}{6}\alpha_k\rho_{n_k}.$$

最后，由(4.13.3)，(4.13.7)和(4.13.8)推得

$$s_{n_k}(x,\ F)\geqslant s_{n_k}(x,\ \alpha_k f_{n_k})-\frac{1}{6}\alpha_k\rho_{n_k}-\frac{1}{6}\alpha_k\rho_{n_k}\geqslant\frac{1}{6}\alpha_k\rho_{n_k}\to\infty,$$

从而 F 的 Fourier 级数在 x 点是发散的.

4.14 三角函数系(T)的 Lebesgue 常数

对于实的三角函数系，

$$\rho_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt=\rho_n$$

与 x 无关．我们称 ρ_n 为(T)的第 n 个 Lebesgue 常数.

定理 67. $\rho_n\sim(4/\pi^2)\log n$.

事实上，

$$\rho_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin nt\cot\frac{1}{2}t+\cos nt\right|dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin nt\cot\frac{1}{2}t\right|dt+O(1)=\sigma_n+O(1),$$

其中

$$\sigma_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin nt|}{t}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin u|}{u}du.$$

但

$$\sigma_{n+1}-\sigma_n=\frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,du\sim\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}\sin u\,du=\frac{4}{\pi^2 n}.$$

因此

$$\rho_n\sim\sigma_n\sim(4/\pi^2)\log n.$$

由于 $\rho_n\to\infty$，定理 66 和 67 给出定理 65 的另一证明.

V. Fourier 级数的求和

5.1 引言 第IV章的一些定理建立了种种自然的和拓广的函数类的 Fourier 级数的收敛性问题，但是它们都有着严重的局限性. 首先，在§4.12 我们已指出，$f(x)$ 的 Fourier 级数在 f 的连续点未必收敛. 其次(虽然我们还未证明)，Fourier 级数不一定几乎处处收敛. 因此自然要问，在发散级数的近代理论中，是否有常用的求和法对 Fourier 级数的求和更为有效?

Fejér 于 1904 年在这方向首先前进了重要的一步，当时他指出，在 $f(t)$ 的连续点 θ，

$$\sigma_n(\theta,\ t)=\frac{1}{n+1}\{s_0(\theta,\ f)+s_1(\theta,\ f)+\cdots+s_n(\theta,\ f)\}$$

收敛于 $f(\theta)$. 稍后，Lebesgue 证得几乎处处有 $\sigma_n(f,\ \theta)\to f(\theta)$. 这些结果表明，算术平均求和法(通常称为(C, 1)求和法)对普通收敛失效的两个基本点是有成效的，因此在 Fourier 级数的理论发展中指出了一个转折点. Poisson 则在此以前很多年就用了现在所谓的"Poisson"法或"Abel"法或 A-求和法来求 Fourier 级数的和；但是他的观点是完全不同的，他的观念缺少现代理论要求下的严密性.

一种求和法，若能使任意的可积函数 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数几乎处处以 $f(\theta)$ 为和，则称为"Fourier 有效". 因此，假若 $f_1(\theta)$ 为其和，则 $f_1\equiv f$，且 f_1 的 Fourier 级数与 f 的相同. 否则的话，就会得到一列不同的函数：f_1 是 f 的 Fourier 级数的和，f_2 是 f_1 的 Fourier 级数的和，等等. 对于 Fourier 有效的求和法来说，f_1, f_2, …都是相同的.

5.2 线性的正则求和法 最重要的求和法是线性的.

Toeplitz 首先对这种求和法进行了系统的研究，因而我们称它为T-方法．给了一矩阵

$$((\alpha_{m,n})) \quad (m=0,1,2,\cdots;\ n=0,1,2,\cdots),$$

我们对数列 (s_n) 定义变换 τ_m:

(5.2.1)
$$\tau_m=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{m,n}s_n.$$

我们假设所有这些级数是收敛的，若当 $m\to\infty$ 时，

(5.2.2)
$$\tau_m\to s,$$

则称 s_n 有T-极限为 s，或称 s_n 是(T)收敛于 s，记作

(5.2.3)
$$s_n\to s(\mathrm{T}).$$

我们也将称方法T对于 (s_n) 是有效的．显然，$s_n\to s(\mathrm{T})$ 和 $t_n\to t(\mathrm{T})$ 蕴含着 $As_n+Bt_n\to As+Bt(\mathrm{T})$；这是线性方法的一个特征．若 $\alpha_{m,n}=0\,(m\neq n)$ 而 $\alpha_{m,m}=1$，则 $\tau_m=s_m$，此时T-收敛即为普通的收敛．

以后经常考虑无穷级数的部分和序列:

(5.2.4)
$$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n.$$

若 s_n 有T-极限为 s，则称

$$\sum u_n=u_0+u_1+\cdots$$

为(T)可和于 s，而称T为级数的一种求和法，写作

(5.2.5)
$$u_0+u_1+u_2+\cdots=s(\mathrm{T}).$$

若T求和法使每一个收敛级数可和于原来的和，即 $s_n\to s$ 蕴含着 $s_n\to s(\mathrm{T})$，则称T为一正则求和法．使T为正则的 $\alpha_{m,n}$ 的条件是Toeplitz找到的，我们现在将他的结果叙述成下面的定理．

定理 68．使T为正则的必要充分条件是：存在着与 m 无关的 R，使

(5.2.6)
$$R_m=\sum_{n}|\alpha_{m,n}|<R;$$

对于每一个 n，当 $m\to\infty$ 时，

(5.2.7)
$$\alpha_{m,n}\to 0$$

以及

$$r_m=\sum_n \alpha_{m,n}\to 1. \tag{5.2.8}$$

这些条件的必要性是指，如果它们不被满足，那末一定存在着级数收敛于 s，但不能用 T 求和法求得 s. 我们附加如下的事实：

(i) 最初两个条件已足够保证当 $s_n\to 0$ 时有 $\tau_m\to 0$；

(ii) 若 $\alpha_{m,n}\geqslant 0$ 且 s_n 为实数，则

$$\underline{\lim}\, s_n\leqslant \underline{\lim}\, \tau_m\leqslant \overline{\lim}\, \tau_m\leqslant \overline{\lim}\, s_n;$$

(iii) 若再有 $r_m=1$，则

$$\text{Min}\, s_n\leqslant \tau_m\leqslant \text{Max}\, s_n,$$

这里"Min"和"Max"表示对所有 n 的下界和上界.

(iv) 若 $\alpha_{m,n}$ 中尚含有参数而这些条件关于 $\alpha_{m,n}$ 中的参数一致地成立，则这些结论也一致地成立.

变换 (5.2.1) 依赖于整数参数 m. 有时为方便起见要用到具有连续参数 r 的变换 $\tau(r)$，这里 r 趋向于 ∞, 0, 1 或者其它的极限. 由参数所引起的差别是不重要的，因为，例如，当 $r\to 1$ 时 $\tau(r)\to s$ 与对任意收敛于 1 的数列 r_m，当 $m\to\infty$ 时 $\tau(r_m)\to s$ 是完全一样的. 特别，定理 68 中的 m 换成 r 时，这定理仍成立.

5.3 (C, 1) 求和法以及 A-求和法　　我们以后经常要用的是这两种标准方法中的一种.

(1) 若 $\alpha_{m,n}=\dfrac{1}{m+1}\ (n\leqslant m)$, $\alpha_{m,n}=0\quad (n>m)$,

则

$$\tau_m=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_m}{m+1}=\sigma_m.$$

我们称此法为 (C, 1) 求和法. 因 $\alpha_{m,n}\geqslant 0$ 且 $r_m=1$，所以这个求和法是正则的.

(2) A-求和法依赖于连续参数 r，后者从小于 1 的正数趋向

于1. 若

$$\alpha_{r,n}=\alpha_n(r)=(1-r)r^n,$$

则当 $\sum s_n r^n$ 收敛时,

$$\tau(r)=(1-r)\sum s_n r^n=\sum u_n r^n=\sigma(r).$$

我们立刻可以证明此法满足定理 68 的条件(连续参数的情形),因而是正则的. 这是幂级数连续性的 Abel 定理的实质.

级数当 (C, 1) 可和时一定是 A 可和于同一个和; 但 A-求和法更为有力.

(3) 我们需要对下列两个特殊级数:

$$\text{(C)}\qquad \frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots,$$

$$\text{(S)}\qquad \sin\theta+\sin 2\theta+\cdots^{*)}$$

求值 σ_m 和 $\sigma(r)$. 进行直接计算,对 C 求得

$$(5.3.1)\qquad \sigma_m=\frac{1}{m+1}\sum_0^m D_n(\theta)$$

$$=\frac{1}{2(m+1)}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(m+1)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right\}^2=F_m(\theta),$$

$$(5.3.2)\qquad \sigma(r)=\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=P(r,\ \theta);$$

对于 S 求得

$$(5.3.3)\qquad \sigma_m=\frac{1}{m+1}\sum_1^m \tilde{D}_n(\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{m+1}\,\frac{\sin(m+1)\theta}{\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^2}=G_m(\theta),$$

$$(5.3.4)\qquad \sigma(r)=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}=Q(r,\ \theta).$$

---

*) 在 §§ 3.10, 3.11 中我们用 S 和 C 表示别的级数.

从而推得不论哪种方法使 C 之和为 0; 使 S 之和对不是 2π 的倍数的任何 θ 为 $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta$, 而在每一个不包含 2π 的倍数的闭区间上求和是一致的. 显然

$$F_m(\theta)\geqslant 0,\ P(r,\ \theta)\geqslant 0, \tag{5.3.5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_m(\theta)d\theta=1,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,\ \theta)d\theta=1. \tag{5.3.6}$$

5.4 K-求和法及其核 今后我们始终假设 T 是线性的正则求和法, 但为便于应用起见, 还要加以限制. 我们假设对于每一个 m 成立着

$$\sum_n n|a_{m,n}|<\infty. \tag{5.4.1}$$

这种方法称为 K-求和法. 记 $D_n(\theta)$ 的变换为

$$K_m(\theta)=\sum_n a_{m,n}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}=\sum_n a_{m,n}D_n(\theta), \tag{5.4.2}$$

$K_m(\theta)$ 称为 T 的核; 记 $f(t)$ 的 Fourier 级数在 $t=0$ 的部分和的变换为

$$\begin{aligned}\tau_m(\theta)=\tau_m(\theta,\ f)&=\sum_n a_{m,n}s_n(\theta,\ f)\\&=\frac{1}{\pi}\sum_n a_{m,n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)D_n(t)dt,\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

则

$$\begin{aligned}\tau_m(\theta)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)K_m(t)dt\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(\theta,\ t)K_m(t)dt,\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

这里所以可以逐项积分是由于

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)|\{\sum_n|a_{m,n}|\,|D_n(t)|\}dt\\&\qquad\leqslant\sum_n\left(n+\frac{1}{2}\right)|a_{m,n}|\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\end{aligned}$$

收敛的缘故.

类似于§§ 4.2, 4.3 的收敛判别法, 我们可由 (5.4.4) 推得关于 Fourier 级数的求和判别法. 若 $f=1$, 则对一切 n 有 $s_n=1$, 和 $\sigma_m=\sum a_{m,n}=r_m\to 1$. 所以

(5.4.5) $$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi K_m(t)\,dt=r_m\to 1.$$

且由定理 31, 对于任意的正数 δ, 关于 θ 一致地成立着

(5.4.6) $$\int_\delta^\pi \phi D_n\,dt\to 0;$$

从而由求和法的正则性, 关于 θ 一致地成立着*)

(5.4.7) $$\int_\delta^\pi \phi K_m\,dt=\sum_n a_{m,n}\int_\delta^\pi \phi D_n\,dt\to 0.$$

特别,

(5.4.8) $$\int_\delta^\pi K_m\,dt\to 0.$$

合并(5.4.5)至(5.4.8)与(5.4.4), 得到

(5.4.9) $$\tau_m(\theta)-c=\frac{2}{\pi}\int_0^\delta g_c(t)K_m(t)\,dt+o(1),$$

其中 $g_c(t)$ 如(4.2.3)所定义. 最后我们看到, 对于任意固定的 δ, 在使 $c=c(\theta)$ 为有界的集上, (5.4.9)是一致地成立的.

定理 69. 要使 $f(t)$ 的 Fourier 级数在 $t=\theta$ 为 (T) 可和于 c, 必要充分条件是: 对于某个正数 δ,

(5.4.10) $$J(\delta,c,m)=\int_0^\delta g_c(t)K_m(t)\,dt\to 0.$$

若(5.4.10)在使 $c=c(\theta)$ 为有界的某集 E 上一致地成立, 则在 E 上的收敛是一致的.

相当于定理 69, 自然有相应于连续参数的定理.

5.5 Fourier 级数在连续点或跳跃点的求和 下述定理

*) 因此若将 $\phi(\theta,t)$ 换以 $\phi(\theta+h_m,t)$ 和 $h_m\to 0$, 结论仍旧成立.

的第一部分是这个题目的基本定理之一.

定理 70. 假设T是一个K-求和法且有不依赖于m的H，使

(5.5.1) $$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_m(t)|dt \leqslant H,$$

则

（i）当$\phi(+0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\{f(\theta+t)+f(\theta-t)\}$存在时，级数可和于$\phi(+0)$；特别在连续点可和于$f(\theta)$，在跳跃点可和于$\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$；

（ii）更一般地，若$h_m\to 0$，则在连续点有

(5.5.2) $$\tau_m(\theta+h_m)\to f(\theta),$$

而在跳跃点有

(5.5.3) $$\tau_m(\theta+h_m)-\frac{1}{\pi}\{f(\theta+0)-f(\theta-0)\}\int_0^{h_m}K_m(t)dt$$
$$\to\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\};$$

（iii）若f在闭区间$\langle a, b\rangle$上连续，则级数在$\langle a, b\rangle$上一致地(T)可和于f；又若f在$\langle a, b\rangle$上有界，则$\tau_m(\theta)$在任一内部区间上有界；

（iv）$|\tau_m(\theta)|\leqslant H\,\mathrm{Max}|f(\theta)|, \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(\theta)|d\theta\leqslant\frac{H}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|d\theta,$

这里H与(5.5.1)中的值相同；以及

（v）$$\tau_m(\theta)\to f(\theta)\quad (L).$$

由(5.4.5)推得，假如对于一切m与t，成立着$K_m(t)\geqslant 0$，那末条件(5.5.1)被满足. 特别由于(5.3.5)，可知(5.5.1)对于(C, 1)及A-求和法是成立的. 由(5.4.5)，$H\geqslant 1$.

（i）若$\phi(+0)$存在，设$c=\phi(+0)$，我们可以选取$\eta<\delta$使$|g_0(t)|<\varepsilon(|t|\leqslant\eta)$. 所以由(5.5.1)和(5.4.7)得到

$$|J(\delta, c, m)| \leqslant \varepsilon \int_0^\eta |K_m(t)|\, dt + \left| \int_\eta^\delta g_c(t) K_m(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \pi H \varepsilon + o(1);$$

从而推得(5.4.10).

(ii) 设 f 在 θ 连续而 $h_m \to 0$, 则当 $|t| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $m \geqslant M(\varepsilon)$ 时,

$$|\phi(\theta+h_m, t) - f(\theta)|$$

$$= \frac{1}{2} |f(\theta+h_m+t) + f(\theta+h_m-t) - 2f(\theta)| < \varepsilon.$$

由(5.4.4), $\tau_m(\theta+h_m) - f(\theta)$ 为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \{\phi - f(\theta)\} K_m\, dt + \frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi \phi K_m\, dt - \frac{2f(\theta)}{\pi}\int_\delta^\pi K_m dt + o(1),$$

这里第二项和第三项由(5.4.7)和(5.4.8)趋向于0. 因此

$$|\tau_m(\theta+h_m) - f(\theta)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta |K_m(t)|dt + o(1) \leqslant H\varepsilon + o(1);$$

从而

$$\tau_m(\theta+h_m) \to f(\theta).$$

若 θ 为跳跃点,我们可设

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\{f(\theta+0) + f(\theta-0)\}$$

和 $h_m > 0$. 写着 $d = f(\theta+0) - f(\theta-0)$ 以及

$$g(t) = f(t) - \frac{d}{\pi}\mathrm{f}(t-\theta) = f(t) - k(t)$$

(如 § 3.12 那样消去不连续点), 那末 g 在 θ 连续, 所以

$$(5.5.4) \quad \tau_m(\theta+h_m, g) \to g(\theta) = \frac{1}{2}\{f(\theta+0) + f(\theta-0)\}.$$

同样

$$\tau_m(\theta+h_m, k) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \chi K_m dt,$$

其中由(5.4.4),

$$\chi=\frac{1}{2}\{k(\theta+h_m+t)+k(\theta+h_m-t)\}$$

$$=\frac{d}{2\pi}\{\mathrm{f}(h_m+t)+\mathrm{f}(h_m-t)\},$$

所以，当 h_m 很小时，

$$\chi=\frac{d}{2\pi}(\pi-h_m)\quad(0<t<h_m),$$

$$\chi=-\frac{d}{2\pi}h_m\quad(h_m<t<\pi).$$

因此

$$(5.5.5)\quad \tau_m(\theta+h_m,\ k)=\frac{d(\pi-h_m)}{\pi^2}\int_0^{h_m}K_m dt-\frac{dh_m}{\pi^2}\int_{h_m}^{\pi}K_m dt$$

$$=\frac{d}{\pi}\int_0^{h_m}K_m dt+o(1);$$

由(5.5.4)和(5.5.5)推得(5.5.3)．

(iii) 若 f 在 $\langle a,\ b\rangle$ 内连续(从而为一致连续)，我们可以用(i)的论证，得到对 $\tau_m(\theta)-f(\theta)$ 是一致的．关于有界性的证明是相似的且更为简单．

(iv) 由(5.4.4)推得

$$|\tau_m(\theta)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)||K_m(t)|dt,$$

而两个不等式(其中第一个只有当 $f\in L^\infty$ 时才有意义)乃是上式的推论．最后，我们可以选择一个连续函数 $f^*(\theta)$，使得对于每一个 t，成立着

$$(5.5.6)\quad \int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)-f^*(\theta+t)|d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)-f^*(\theta)|d\theta$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{H}\leqslant\varepsilon.$$

因此，根据(5.4.4)，(5.5.6)和(5.5.1)，

$$|\tau_m(\theta,\ f)-\tau_m(\theta,\ f^*)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)-f^*(\theta+t)||K_m(t)|dt,$$

$$(5.5.7)\quad \int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(\theta,\ f)-\tau_m(\theta,\ f^*)|\,d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_m(t)|\,dt\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)-f^*(\theta+t)|\,d\theta\leqslant\varepsilon.$$

由(5.5.6)和(5.5.7)得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(\theta,\ f)-f(\theta)|\,d\theta\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(\theta,\ f^*)-f^*(\theta)|\,d\theta+2\varepsilon.$$

但由(iii)，$\tau_m(\theta,\ f^*)\to f^*(\theta)$一致地成立；所以对于$m\geqslant M(\varepsilon)$，

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(\theta,\ f)-f(\theta)|\,d\theta\leqslant 3\varepsilon.$$

(5.5.1) 中的积分乃是“T-求和法的 Lebesgue 常数”. 它们的有界性也是使定理 70 成立的必要条件：如果它们不是有界，那末我们可以象 § 4.13 中所说的办法构造连续函数，使其 Fourier 级数不常是(T)可求和.

我们已经看到，当$K_m(t)\geqslant 0$时(5.5.1)是满足的. 此时，用证明(i)的方法可以证明，

$$\varliminf_{t\to 0}\phi(\theta,\ t)\leqslant\varliminf_{m\to\infty}\tau_m(\theta)\leqslant\varlimsup_{m\to\infty}\tau_m(\theta)\leqslant\varlimsup_{t\to 0}\phi(\theta,\ t).$$

又若$\tau_m=1$和对于一切θ有$\mu\leqslant f(\theta)\leqslant M$，则$\mu\leqslant\tau_m(\theta)\leqslant M$. 这些条件(或者其变形)，(C, 1)与 A-求和法都是满足的.

5.6 几乎处处可求和 条件(5.5.1)不能使我们证明相应的求和法在 § 5.1 的意义下是“Fourier 有效”的. 我们在下述两定理中对$K_m(t)$加上了更强的条件.

定理 71. 设T为一K-求和法，又设

$$(5.6.1)\qquad \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}t\,|K'_m(t)|\,dt\leqslant H.$$

那末对于满足

$$(5.6.2)\qquad \Phi(t)=\int_{0}^{t}g_0(u)\,du=o(t)$$

(即当 f 满足条件 l_c 时)的任意 θ, 成立着 $\tau_m(\theta)\to c$. 特别对于几乎一切 θ, 有

$$\tau_m(\theta)\to f(\theta). \tag{5.6.3}$$

由 (5.4.1) 和 (5.4.2) 推得, $K_m(t)$ 或许除了原点以外都有连续的导数; 也容易证明当用 $R+H$ 代替 H 时 (5.6.1) 蕴含着 (5.5.1).

现在假设定理中的条件是满足的, 我们可以选取 δ 使得当 $0<t\leqslant\delta$ 时 $|\Phi(t)|\leqslant\varepsilon t$. 因此

$$J(\delta,\ c,\ m)=\int_0^\delta g_c(t)\,K_m(t)\,dt$$

$$=\Phi(\delta)\,K_m(\delta)-\int_0^\delta \Phi(t)\,K'_m(t)\,dt;$$

由(5.4.2)和(3.6.6)得到

$$|K_m(\delta)|\leqslant\frac{1}{2}R\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\delta\leqslant\frac{1}{2}\pi R/\delta.$$

因此

$$|J|\leqslant\frac{1}{2}\pi R\varepsilon+\varepsilon\int_0^\delta t|K'_m|\,dt\leqslant\frac{1}{2}\pi(R+H)\varepsilon,$$

从而推得结论.

我们将在以后看到, A-求和法满足(5.6.1), 可是(C, 1)求和法则不然,所以定理 71 不能证明(C, 1)求和法为"Fourier 有效". 为此需要另外的定理.

定理 72. 设 T 为一 K-求和法,而

$$|K_m(t)|\leqslant K^*_m(t), \tag{5.6.4}$$

其中 $K^*_m(t)$ 或许除了原点以外都是绝对连续的,又

$$\int_0^\pi t|K^{*\prime}_m(t)|\,dt\leqslant H_1. \tag{5.6.5}$$

则当

$$\Phi^*(t)=\int_0^t |g_c(u)|\,du=o(t) \tag{5.6.6}$$

(即 f 满足 L_c) 时 $\tau_m(\theta)\to c$. 特别, 对于几乎一切 θ 有 $\tau_m(\theta)\to f(\theta)$.

首先我们注意

$$K_m^*(t)=K_m^*(\pi)-\int_t^\pi \frac{\tau K_m^{*\prime}(\tau)}{\tau}d\tau\leqslant K_m^*(\pi)+H_1t^{-1}\leqslant H_2t^{-1}.$$

因此,若选取 δ 使当 $0<t\leqslant\delta$ 时 $|\Phi^*(t)|\leqslant\varepsilon t$, 则

$$\begin{aligned}|J(\delta, c, m)|&\leqslant\int_0^\delta |g_c(t)||K_m(t)|dt\leqslant\int_0^\delta |g_c(t)|K_m^*(t)dt\\&=\Phi^*(\delta)K_m^*(\delta)-\int_0^\delta \Phi^*(t)K_m^{*\prime}(t)dt\\&\leqslant\varepsilon H_2+\varepsilon\int_0^\delta t|K_m^{*\prime}(t)|dt\leqslant H\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 $H=H_1+H_2$, 从而定理证毕.

5.7 Fourier 级数的(C, 1)求和 由(5.3.1)和(5.4.2), (C, 1)求和法的核为 $F_m(t)$; 由(5.3.6), $F_m(t)$ 满足(5.5.1). 此外, 它在$(0, \pi/m)$为$O(m)$而在$(\pi/m, \pi)$为$O(m^{-1}t^{-2})$. 这给出它满足(5.5.1)的另一证明,同时指出具有正数 H 使

$$|F_m|\leqslant F_m^*=\frac{Hm}{1+m^2t^2}. \tag{5.7.1}$$

由于

$$\int_0^\pi t|F_m^{*\prime}|dt=2H\int_0^\pi \frac{m^3t^2dt}{(1+m^2t^2)^2}<2H\int_0^\infty \frac{u^2du}{(1+u^2)^2}, \tag{5.7.2}$$

从而, F_m 也满足定理 72 的条件.

定理 73. (C, 1) 求和法满足定理 70 和 72 的条件. 特别, $f(t)$ 的 Fourier 级数在连续点 $t=\theta$ 为 (C, 1) 可和于 $f(\theta)$, 在跳跃点为 (C, 1) 可和于 $\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$, 而它在任何连续的闭区间上为一致可求和. 更一般地说,对 $f(t)$ 满足 L_c 的点它是可和于 c,而对于几乎一切 θ 为可和于 $f(\theta)$. 同时

$$\sigma_m(\theta)\to f(\theta)\quad (L). \tag{5.7.3}$$

重要的是注意到 $F_m(t)$ 不满足定理 71 的条件. 事实上,

$$F'_m(t)=\frac{\sin(m+1)t}{4\sin^2\frac{1}{2}t}-\frac{\sin^2\frac{1}{2}(m+1)t\cos\frac{1}{2}t}{2(m+1)\sin^3\frac{1}{2}t},$$

所以对 $\int t|K'_m|dt$, 第二项的积分为有界, 而第一项积分相当于 § 4.14 中 Lebesgue 常数的倍数.

在应用定理 70 的(ii)时, 为方便起见假设 $mh_m\to a$, 此地 $-\infty\leqslant a\leqslant\infty$. 那末记着 $M=m+1$, 就有

$$\int_0^{h_m}F_m(t)dt=\frac{1}{2M}\int_0^{h_m}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}Mt}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2dt=\frac{2}{M}\int_0^{h_m}\frac{\sin^2\frac{1}{2}Mt}{t^2}dt+o(1)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}Mh_m}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du+o(1)=\int_0^{\frac{1}{2}a}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du+o(1).$$

因此, (5.5.3)成为

$$\sigma_m(\theta+h_m)\to\frac{1}{2}[f(\theta+0)+f(\theta-0)]+\frac{1}{\pi}\{f(\theta+0)-f(\theta-0)\}\int_0^{\frac{1}{2}a}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du. \tag{5.7.4}$$

特别当 $a=\infty$ 时,

$$\sigma_m(\theta+h_m)\to f(\theta+0) \tag{5.7.5}$$

$\left(\text{此时积分有值}\ \frac{1}{2}\pi\right)$.

方程(5.7.4)在 "Gibbs 现象"(§ 3.12) 的理论中有着有趣的应用. 我们可以象 § 3.12 定义通常的 Gibbs 集那样来定义在 $f(t)$ 的跳跃点 θ 处"对应于 T 的 Gibbs 集", 就是 $\tau_m(\xi)$ 当 $m\to\infty$ 和 $\xi\to\theta$ 时的一切极限的全体. 这也就是对应于所有值 a 的 $\tau_m(\theta+h_m)$ 的一切极限的全体, 又 (5.7.4) 指出, 此时这些极限恰好填满从 $f(\theta-0)$ 到 $f(\theta+0)$ 的区间. 所以(C, 1)求和法没有 Gibbs 现象. 这是具有正核的求和法的一般性态.

5.8 共轭级数的(C, 1)求和 共轭级数具有一般的求和理论, 类似于在 §§ 5.4~5.6 对 Fourier 级数所讲的理论. 我们将这些留给读者; 但有关(C, 1)求和法的定理是很重要的, 且在以后要用到. 我们记

(5.8.1) $$\tilde{\sigma}_m(\theta)=\tilde{\sigma}_m(\theta, f)=\frac{1}{m+1}\sum_0^m \tilde{s}_n(\theta, f).$$

定理 74. 若 f 在 $t=\theta$ 满足 $\tilde{L}_0$, 则

(5.8.2) $$\tilde{\sigma}_m(\theta)-\tilde{f}_m(\theta)=\tilde{\sigma}_m(\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/m}^{\pi}\psi(\theta, t)\cot\frac{1}{2}t\,dt\to 0,$$

又这是对于几乎一切 θ 成立的. 若同时 $\tilde{f}(\theta)$ 存在, 则

(5.8.3) $$\tilde{\sigma}_m(\theta)\to\tilde{f}(\theta).$$

最后两句话是第一句话的推论. 我们在 §6.8 (定理 89) 中将要证明 $\tilde{f}(\theta)$ 几乎处处存在, 所以 (5.8.3) 几乎处处成立; 但定理 89 更为深刻. 我们记

(5.8.4) $$\Psi^*(t)=\int_0^t|\psi(u)|\,du.$$

由于 f 满足 $\tilde{L}_0$, $\Psi^*(t)=o(t)$. 根据 (4.9.1), (5.3.3) 和 (5.8.1) 就有

$$\tilde{\sigma}_m(\theta)=\frac{1}{m+1}\sum_0^m\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\psi(\theta, t)\tilde{D}_m(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\psi(\theta, t)G_m(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\psi\left\{\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t-\frac{\sin(m+1)t}{4(m+1)\sin^2\frac{1}{2}t}\right\}dt,$$

$$\tilde{\sigma}_m-\tilde{f}_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/m}\psi G_m\,dt-\frac{1}{4(m+1)\pi}\int_{\pi/m}^{\pi}\psi\,\frac{\sin(m+1)t}{\sin^2\frac{1}{2}t}\,dt=J_1-J_2.$$

今对于 $0<t\leqslant\pi/m$,

$$G_m=\frac{1}{\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^2}\left\{\sin t-\frac{\sin(m+1)t}{m+1}\right\}=O(m^2t);$$

从而

$$J_1=O\left(m^2\int_0^{\pi/m} t|\psi|dt\right)=O\left\{m\Psi^*\left(\frac{\pi}{m}\right)\right\}=o(1).$$

另一方面，

$$|J_2|\leqslant\frac{\pi}{4(m+1)}\int_{\pi/m}^{\pi}|\psi|\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqslant\frac{\pi}{4(m+1)}\left\{\frac{\Psi^*(\pi)}{\pi^2}+2\int_{\pi/m}^{\pi}\frac{\Psi^*(t)}{t^3}dt\right\}$$

$$=o(1)+O\left(\frac{1}{m}\right)\int_{\pi/m}^{\pi}o\left(\frac{1}{t^2}\right)dt=o(1);$$

所以 $\tilde{\sigma}_m-\tilde{f}_m=o(1)$.

5.9 A 求和　　若 $\sum u_n$ 为(C, 1)可和，则它一定是 A 可和．但是独立地去考虑 A 求和却是重要的，因为 (a) 它在更广的条件下也是有效的；(b) 它有助于将 Fourier 级数的理论同调和解析函数联系起来．

A-求和法的核是(5.3.2)的 $P(r, \theta)$．若 $f\in L$，则

(5.9.1)
$$u(r, \theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^{\infty}A_n(\theta)r^n$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2}+r\cos(t-\theta)+\cdots\right\}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r, t-\theta)f(t)dt.$$

类似地，若 $Q(r, \theta)$ 由(5.3.4)定义，则

(5.9.2)
$$v(r, \theta)=\sum_1^{\infty}B_n(\theta)r^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(r, t-\theta)f(t)dt.$$

这两个函数在§1.2的意义下，是共轭的调和函数．与 f 有关的函数 $u(r, \theta)$ 称为 f 的 Poisson 积分．Fourier 级数或共轭级数的 A 求和理论是由此特殊方法产生的调和函数的向径极限的理论．

我们若从 $r<1$ 中正则的任意一个调和函数出发，那末就有可

能定义它的一个边界函数(例如取向径极限). 这个边界函数可能属于 L 也可能不属于 L. 若它属于 L, 称它为 f, 我们可以定义 f 的 Fourier 级数和 Poisson 积分; 于是发生了这样的问题: 这个 f 的 Poisson 积分是否就是我们开始出发的调和函数. 这个问题的答案不一定是正面的, 这由函数 $P(r, \theta)$ 具有边界函数 $0(0<\theta<2\pi)$ 可以看出. 这一类问题常常是困难的, 它应该属于"唯一性定理"; 在第 VII 章我们将对后者给出简单的介绍.

(C, 1) 的核与 A 的核的最大区别在于后者满足定理 71 的条件. 因为 $P\geqslant 0$ 而 $P'\leqslant 0$, 所以

$$\int_0^{2\pi} t|P'|\,dt=-\int_0^{\pi} tP'\,dt=\int_0^{\pi}P\,dt-\pi P(\pi)\leqslant\int_0^{\pi}P\,dt=\frac{1}{2}\pi.$$

定理 75. A-求和法满足定理 70 和 71 的条件. 特别, $f(t)$ 的 Fourier 级数, 于连续点 θ 处为 A 可和于 $f(\theta)$, 于跳跃点为 A 可和于 $\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$, 而在任何一个连续的闭区间内是一致 A 可和的. 一般地说, 它在 $f(t)$ 满足 l_c 的点上可和于 c, 并且几乎处处可和于 $f(\theta)$. 此外还成立着

$$u(r, \theta)\to f(\theta)\quad (L). \tag{5.9.3}$$

若 $h_r\to 0$ 及 $(1-r)^{-1}h_r\to a$, 则

$$\frac{1}{2}\int_0^{h_r}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt=\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{1}{2}h_r\right)\to\arctan a.$$

于是从 (5.5.3), 经过改变使其适合于连续参变数后推得: 当 $h_r\to 0$, $(1-r)^{-1}h_r\to a$ 时,

$$u(r, \theta+h_r)\to\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}+\frac{1}{\pi}\{f(\theta+0)-f(\theta-0)\}\arctan a. \tag{5.9.4}$$

当 $a=\infty$ 时就成为

$$u(r, \theta+h_r)\to f(\theta+0). \tag{5.9.5}$$

这个对应于(5.7.5)的结果, 象(5.7.5)那样, 对于跳跃点是被证明了的. 自然会发生这样的问题, (5.9.5) 在什么时候可以单由 $f(\theta+0)$ 的存在而推得? 我们将证明, 当 $h_r\to 0$, $\underline{\lim}\,(1-r)^{-1/2}h_r=L>0$ 和 $f(\theta+0)$ 存在时,

(5.9.5)就已经成立.

我们可以假设 $\theta=0$ 和 $f(\theta+0)=f(+0)=0$. 显然只要能够证明对于某个 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 和 $1-r\leqslant\rho(\varepsilon)$, 成立着

$$|J|=\left|\int_{-\delta}^{\delta}f(t)P(r,\ t-h_r)dt\right|<\varepsilon. \tag{5.9.6}$$

我们可以选取 η 和 δ 使得

$$\left(\frac{2}{L^2}+\pi\right)\eta<\varepsilon,\ |f(t)|<\eta\quad(0<t\leqslant\delta),\ \int_{-\delta}^{0}|f|dt<\eta,$$

于是在 $(-\delta,0)$ 中

$$P(r,\ t-h_r)\leqslant\frac{1-r^2}{4r\sin^2\frac{1}{2}(t-h_r)}\leqslant\frac{1-r}{2r\sin^2\frac{1}{2}h_r},$$

从而推得

$$|J|\leqslant\frac{1-r}{2r\sin^2\frac{1}{2}h_r}\int_{-\delta}^{0}|f|dt+\eta\int_{0}^{\delta}P(r,\ t-h_r)dt$$

$$<\left(\frac{1-r}{2r\sin^2\frac{1}{2}h_r}+\pi\right)\eta,$$

$$\varlimsup_{r\to1}|J|\leqslant\left(\frac{2}{L^2}+\pi\right)\eta<\varepsilon,$$

这等价于(5.9.6).

将(5.9.4)和(5.9.6)叙述成为关于调和函数的定理就更易明了. 设 P 和 P_0 为具有极坐标 (r,θ) 和 $(1,\theta_0)$ 的点, 又 $\rho=1-r$ 和 $h=\theta-\theta_0$. 如果 $r\to1$ 和 $\theta\to\theta_0$ 的方式使得 $h\sim a\rho$, 则 P 沿着一个与向径 OP_0 做成一个角为 $\operatorname{arc\,tan} a$ 的路线趋向于 P_0. 如果 $\varliminf\rho^{-1/2}h>0$, 则 P 在由单位圆与一个在 P_0 点与之相切的较小的圆所做成的月形区域内趋向于 P_0. 在第一个情形下 $u(r,\theta)$ 趋向于极限(5.9.4), 在第二个情形下趋向于 $f(\theta_0+0)$, 只要这些极限是存在的.

5.10 共轭级数的 A 求和

对于共轭级数, 相当于定理 75 的是下列定理:

定理 76. 若当 $t=\theta$ 时 f 满足 $\tilde{l}_0$ 而 $\eta=\arcsin(1-r)$, 则

$$v(r,\theta)-\tilde{f}_\eta(\theta)=v(r,\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{\pi}\psi(\theta,t)\cot\frac{1}{2}t\,dt\to0. \tag{5.10.1}$$

若 $\tilde{f}(\theta)$ 存在，则 $v(r, \theta)\to\tilde{f}(\theta)$.

由(5.9.2)推得

$$v(r, \theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+t)Q(r, t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\psi(\theta, t)Q(r, t)\,dt,$$

(5.10.2) $$v(r, \theta)-\tilde{f}_\eta(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\eta \psi Q\,dt-\frac{1}{\pi}\int_\eta^\pi \psi q\,dt=J_1-J_2,$$

其中

$$Q(t)=\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2},$$

$$q(t)=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t-Q(t)=\frac{\frac{1}{2}(1-r)^2\cot\frac{1}{2}t}{1-2r\cos t+r^2}.$$

置 $\Delta=1-2r\cos t+r^2=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{1}{2}t$，则易证

$$Q(\pi)=0,\ q(\pi)=0,\ Q(\eta)=O\left(\frac{1}{\eta}\right),\ q(\eta)=O\left(\frac{1}{\eta}\right),$$

$$Q'=\frac{r\{(1+r^2)\cos t-2r\}}{\Delta^2}=O\left(\frac{1}{\eta^2}\right)\quad(0<t\leqslant\eta),$$

$$q'=-\frac{(1-r)^2\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}t}{4\Delta}-\frac{2r(1-r)^2\cos^2\frac{1}{2}t}{\Delta^2}$$

$$=O\left\{\frac{(1-r)^2}{t^4}\right\}=O\left(\frac{\eta^2}{t^4}\right).$$

因此，若 $\Psi(t)=\int_0^t\psi\,du$，则 $\Psi(t)=o(t)$，故

$$J_1=\frac{1}{\pi}\Psi(\eta)Q(\eta)-\frac{1}{\pi}\int_0^\eta \Psi Q'\,dt$$

$$=o(1)+\frac{1}{\eta^2}\int_0^\eta o(t)\,dt=o(1),$$

$$J_2=-\frac{1}{\pi}\Psi(\eta)q(\eta)-\frac{1}{\pi}\int_\eta^\pi \Psi q'\,dt$$

$$=o(1)+\eta^2\int_\eta^\pi\frac{o(t)}{t^4}\,dt=o(1),$$

于是由(5.10.2)推得定理.

在定理 74 和 76 之间有一个很重要的差异. 若 $\tilde{f}(\theta)$ 存在,则(由 §4.10 的最后一节) f 一定满足 $\tilde{l}_0$, 于是 $\tilde{f}(\theta)$ 的存在本身已经足够保证共轭级数为 A 可和于 $\tilde{f}(\theta)$. 在定理 74 中我们要求更强的条件 $\tilde{L}_0$; 如果 $\tilde{f}$ 作为一 Lebesgue 积分存在, 那末 $\tilde{L}_0$ 就自然满足.

5.11 定理 70 至 76 的一些应用 有关求和的定理使我们能够对前几章中的结果加上许多重要的补充, 我们在这里选择三点.

(1) 首先由 A-求和法的正则性立即得到: 若一级数为收敛, 则它是 A 可和于同一个数. 因此我们推得

定理 77. 若 $f(t)$ 的 Fourier 级数在使 $f(t)$ 满足 l_c 的点 θ 处收敛,则其和为 c. 特别,若级数在连续点或跳跃点收敛,则其和为 $f(\theta)$ 或 $\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$. 假如它几乎处处收敛,那末它几乎处处表示 $f(\theta)$.

若共轭级数于 $\tilde{f}(\theta)$ 存在的点处收敛,则其和为 $\tilde{f}(\theta)$.

当我们证明了(定理 89) $\tilde{f}$ 几乎处处存在之后,那末就可知道,如果共轭级数几乎处处收敛,则它几乎处处表示 $\tilde{f}$.

(2) 其次考虑具有 Fourier 系数为 $O(n^{-1})$ 的函数: 由定理 37, 所有 V 中的函数满足这个条件. 根据"Tauberian"定理, 当 $\sum u_n$ 为(C, 1)可和且 $u_n=O(n^{-1})$ 时, $\sum u_n$ 为收敛, 从而推得: 这种函数的 Fourier 级数只要是(C, 1)可和, 就一定收敛, 并且几乎处处收敛于 $f(\theta)$.

特别, 当 $f\in V$ 时 f 的 Fourier 级数收敛于 $\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$. 将此结果与定理 52 相结合就得到定理 56 和定理 57 的另外的证明.

(3) 由定理 73 不难导出 Weierstrass 定理 (定理 23) 和完备性定理(定理 19).

(i) 若 f 为连续且具有周期 2π, 则 $\sigma_m(\theta)$ 一致收敛于 $f(\theta)$. 这就证明了定理 24, 而定理 23 由 § 2.9 可知为定理 24 的一个推论.

(ii) 在证明定理 19 时 (如在 § 2.6 中所见), 可以假设 f 为连续. 若 f 的所有 Fourier 系数为 0, 则对一切 θ 成立着 $\sigma_m(\theta)=0$, 所以它的极限即为 0. 不然的话 (如果不归结为连续的情形), $\sigma_m(\theta)$ 几乎处处收敛于 $f(\theta)$, 从而 $f(\theta)\equiv 0$. 这个证明不很简单, 因为它依赖于定理 72 而不是定理 70.

5.12 Fourier 级数的导级数 若 $f_1(t)$ 是 $f(t)$ 的一个积分, 则

$$\frac{\Phi(t)}{t}=\frac{1}{t}\int_0^t g_c(u)\,du=\frac{1}{2t}\int_0^t\{f(\theta+u)+f(\theta-u)-2c\}\,du$$

$$=\frac{f_1(\theta+t)-f_1(\theta-t)}{2t}-c.$$

因此 $\Phi(t)=o(t)$ 等价于

$$\frac{f_1(\theta+t)-f_1(\theta-t)}{2t}\to c.$$

在这情形下我们说 $f_1(t)$ 在 $t=\theta$ 处具有广义一阶导数等于 c, 记作 $Df_1(\theta)=c$. 由定理 75 推得: $f(t)$ 的 Fourier 级数在 $f_1(t)$ 有广义一阶导数的 θ 处为 A 可和.

f 的 Fourier 级数是 f_1 的 Fourier 级数的导级数, 即级数由形式上的求导获得; 因此由刚才证明的结果使人联系到更一般的定理, 后者是以 f 代替 f_1, 而导级数本身通常不是 Fourier 级数.

定理 78. 若 $f(t)$ 在 $t=\theta$ 有广义一阶导数 $Df(\theta)$, 则当 $r\to 1$ 时有

$$(5.12.1)\quad \frac{\partial u(r,\ \theta)}{\partial\theta}=\sum_{1}^{\infty} n(b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta)r^n\to Df(\theta).$$

换言之，$f(t)$的 Fourier 级数在 $t=\theta$ 的导级数为 A 可和于 $Df(\theta)$.

事实上，对(5.9.1)关于 θ 微分，

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P'(t-\theta)dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+t)P'(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{2\sin t}L(t)dt,$$

其中 $P(t)=P(r,\ t)$，出现的导数表示关于 t 求导，又

$$L(t)=-2\sin tP'(t)=\frac{2r(1-r^2)\sin^2 t}{(1-2r\cos t+r^2)^2}.$$

被积函数的第一个因子当 $t\to 0$ 时趋向于 $Df(\theta)$. 同时 $L(t)\geqslant 0$，$L(t)$在任何区间 $0<\delta\leqslant t\leqslant\pi$ 内一致地收敛于 0，又

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} L(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos tP(t)dt=r\to 1.$$

因此利用类似于证明定理 70(i) 的方法可以推得(5.12.1).

这个定理是一系列定理中的一个. 例如可以证明，当 f 在 $t=\theta$ 有 k 阶（普通意义）导数时 u 关于 θ 的 k 阶偏导数趋向于 $f^{(k)}(\theta)$；而这些结果可以解释为 f 的 Fourier 级数逐次求导后的 A 可和性定理.

VI. 第 V 章定理的应用

6.1 引言 我们在本章中收集一些定理，它们大都是第 V 章中已证定理的应用．定理 79 在逻辑上属于第 IV 章，但因其证明依赖于第 V 章的函数 $F_m(\theta)$ 的性质，所以为方便起见插在这里来讲．

6.2 一个几乎处处发散的 Fourier 级数 我们在第 V 章（定理 73 和 75）已经证明，(C, 1) 求和法和 A-求和法是"Fourier 有效"的，就是说，它们使每一个 Fourier 级数几乎处处可和于其展开函数．我们现在将证明古典的收敛法不是 Fourier 有效的．

定理 79．存在着几乎处处发散的 Fourier 级数．

证明的核心含在下面的准备定理之中．

定理 80．存在着三角多项式列 ϕ_n，具有下列诸性质：

(i) $\phi_n \geqslant 0$,

(ii) $\dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi_n\, d\theta = 1$,

(iii) 对于每一个 ϕ_n，对应着：(a) 一个 M_n, $M_n \to \infty$; (b) 一个集合 E_n, E_n 的测度趋向于 2π; (c) 一个整数 q_n，使得对于每一个属于 E_n 的 θ 和一个 $p_n = p_n(\theta) \leqslant q_n$，有

$$|s_{p_n}(\theta, \phi_n)| > M_n.$$

记

$$A_j = 4j\pi/(2n+1) \quad (0 \leqslant j \leqslant n);$$

并假设 $m_0, m_1, \cdots, m_n$ 是具有下述性质的整数列：(a) $m_0 \geqslant n^4$, (b) $m_{l+1} > 2m_l$ 以及 (c) $2m_l + 1$ 可被 $2n+1$ 除尽；又定义 ϕ_n 如下：

$$\phi_n(\theta) = \frac{1}{n+1}\{F_{m_0}(\theta - A_0) + F_{m_1}(\theta - A_1) + \cdots$$
$$+ F_{m_n}(\theta - A_n)\},$$

其中 F_m 是 Fejér 核(5.3.1). 显然, ϕ_n 是一个非负的多项式, 因为每一个 F_m 以 $\frac{1}{2}$ 为首项, 所以它满足(ii).

若 $m_j \leqslant k < m_{j+1}$, 则

$$s_k(\theta,\ \phi_n) = \frac{1}{n+1}\Big[\sum_{l=0}^{j} F_{m_l}(\theta - A_l) + \sum_{l=j+1}^{n}\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{k}\frac{m_l+1-r}{m_l+1}\cos r(\theta - A_l)\Big\}\Big];$$

又若将最后一项分为两部分, 写着

$$m_l+1-r = k+1-r+(m_l-k),$$

我们得到

$$s_k(\theta,\ \phi_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{j} F_{m_l}(\theta - A_l) + \frac{1}{n+1}\sum_{l=j+1}^{n}\frac{k+1}{m_l+1}F_k(\theta - A_l) + \frac{1}{n+1}\sum_{l=j+1}^{n}\frac{m_l-k}{m_l+1}D_k(\theta - A_l) = S_1 + S_2 + S_3, \tag{6.2.1}$$

此地 D_k 为 Dirichlet 核. 恒等式对 $m_j \leqslant k < m_{j+1}$ 是真的, 实际上我们取 $k = m_j$.

我们在区间 J_j, 即$(A_j + n^{-2},\ A_{j+1} - n^{-2})$ 中考虑 $s_{m_j}(\theta,\ \phi_n)$. 因为 $F_m(t) = O(m^{-1}t^{-2})$ 且对 J_j 的 θ 与一切 l 有 $|\theta - A_l| \geqslant n^{-2} \geqslant m_l^{-1/2}$, 所以(6.2.1)的 F_m 是一致有界的. 因此 S_1 和 S_2 是有界的, 并且对于 J_j 中的 θ, 适合

$$|s_{m_j}(\theta,\ \phi_n)| > |S_3| - H. \tag{6.2.2}$$

今

$$\left(m_j + \frac{1}{2}\right)(A_j - A_{j+1}) = (2m_j+1)(l-j-1)\frac{2\pi}{2n+1} \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

所以 $S_3 = \sigma T$, 其中

$$\sigma = \sin\left\{\left(m_j + \frac{1}{2}\right)(A_{j+1} - \theta)\right\}, \tag{6.2.3}$$

$$(6.2.4)\qquad T=\frac{1}{n+1}\sum_{l=j+1}^{n}\frac{m_l-m_j}{m_l+1}\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(A_l-\theta)}.$$

T 中各项是正的,又因 $m_{j+1}>2m_j$,所以当 $1\leqslant j<n-\sqrt{n}$ 时,

$$(6.2.5)\qquad (n+1)T>\frac{1}{2}\sum_{l=j+1}^{n}\frac{1}{A_l-\theta}>\frac{1}{2}\sum_{l=j+1}^{n}\frac{1}{A_l-A_j}$$
$$=\frac{2n+1}{8\pi}\sum_{l=j+1}^{n}\frac{1}{l-j}>\frac{2n+1}{8\pi}\log(n-j)$$
$$>\frac{n+1}{16\pi}\log n.$$

我们定义 E_n 为如下的 θ 的集合: θ 属于 J_j, $1\leqslant j<n-\sqrt{n}$,并且适合

$$(6.2.6)\qquad |\sigma|=\left|\sin\left\{\left(m_j+\frac{1}{2}\right)(A_{j+1}-\theta)\right\}\right|>(\log n)^{-\frac{1}{2}}.$$

那末,由(6.2.2)至(6.2.6)得到对于 E_n 中的 θ,

$$|s_{m_j}(\theta,\ \phi_n)|>\frac{(\log n)^{\frac{1}{2}}}{16\pi}-H=M_n.$$

当 θ 在 J_j 中时,我们取此值作为 M_n,取 m_n 作为 q_n,取 m_j 作为 $p_n(\theta)$.

剩下来只要证明 $mE_n\to2\pi$;而这是显然的. 因为具有 $1\leqslant j\leqslant n-n^{1/2}$ 的 J_j 在 $(0,\ 2\pi)$ 中除了测度为 $O(n\cdot n^{-2})+O(n^{1/2}n^{-1})=O(n^{-1/2})$ 的集合外填满一切,而不满足(6.2.6)的部分其测度为 $O\{(\log n)^{-1/2}\}$.

现在容易证明定理 79. 由 $M_n\to\infty$,我们可以选取数列(n_s)使 $\sum M_{n_s}^{-1/2}<\infty$. 我们将 ϕ_n 写成指数函数的和,置

$$T_{n_s}=\frac{e^{r_si\theta}}{M_{n_s}^{\frac{1}{2}}}\phi_{n_s}=\frac{e^{r_si\theta}}{M_{n_s}^{\frac{1}{2}}}\sum_{-m_{n_s}}^{m_{n_s}}c_\nu e^{\nu i\theta},$$

$$\Phi=T_{n_1}+T_{n_2}+\cdots,\qquad T=(T_{n_1})+(T_{n_2})+\cdots,$$

这里(T_{n_s})表示将 T_{n_s} 展开为指数函数的和. 显然可以选择 r_s 使得当 T 是一个(复的)三角级数时, T 的项之间没有重迭. 由于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|e^{-pi\theta}|\sum|T_{n_s}|d\theta\leqslant\frac{1}{\pi}\sum\frac{1}{M_{n_s}^{\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi}\phi_{n_s}d\theta=\sum\frac{1}{M_{n_s}^{\frac{1}{2}}}<\infty,$$

从而级数 $\sum T_{n_s}$ 几乎处处收敛于一个可积函数 Φ，因而乘以 $e^{-pi\theta}$ 后可以逐项积分．所以 T 是 Φ 的 Fourier 级数．另一方面，如果 θ 在 E_{n_s} 内，那末 (T_{n_s}) 包含着一部分依次相连的项，其和在数值上大于 $M_{n_s}^{1/2}$．所以当 θ 位于无限个 E_{n_s} 时 T 是发散的；但这是几乎处处成立的，因为 $mE_{n_s}\to 2\pi$ *⁾.

6.3 具有正系数的 Fourier 级数 当 Fourier 常数为正时，函数的连续性与其 Fourier 级数收敛性之间的关系就非常简单．在§§ 3.10 至 3.11 我们考虑过具有正的递降系数的级数；在本节中我们证明两个定理，这两个定理与以前证明过的定理有关，但具有更一般的性质．为方便起见，将偶函数和奇函数分开来考虑．

定理 81．假如 f 是偶函数并且是有界的，$f\sim(a_n,\ 0)$，又 $a_n\geqslant 0$，则 $\sum a_n<\infty$（因而 f 为连续）．

因为由定理 70(iv)，$\sigma_{2n}(0)$ 为有界；又因 $a_m\geqslant 0$，所以

$$\frac{1}{2}s_n(0)\leqslant\frac{n+1}{2n+1}s_n(0)\leqslant\frac{1}{2n+1}\sum_n^{2n}s_m(0)\leqslant\sigma_{2n}(0),$$

因此 $\sum a_n<\infty$（而 Fourier 级数一致收敛）．

对于定理 81，其实我们只需假设 f 靠近原点为有界就够了．

定理 82．假如 f 是奇函数并且是有界的，$f\sim(0,\ b_n)$，又 $b_n\geqslant 0$，则 $s_n(\theta)$ 一致有界．如果再设 f 为连续，则 f 的 Fourier 级数一致收敛．

（i）若 $|f|\leqslant 1$，则由定理 70(iv)，

$$|\sigma_N(\theta)|=\left|\sum_1^N\left(1-\frac{m}{N+1}\right)b_m\sin m\theta\right|\leqslant 1. \tag{6.3.1}$$

---

*⁾ T 为复项级数．假如我们愿意，可以取 T 的实部而得到一个实的级数．但论证须稍加改变，并且必须用到第 VII 章的定理 92．

取 $N=2n$ 和 $\theta=\pi/4n$, 当 $1\leqslant m\leqslant 2n$ 时, $\sin m\theta\geqslant m/2n$, 所以

$$0\leqslant\sum_1^{2n}\left(1-\frac{m}{2n+1}\right)mb_m\leqslant 2n. \tag{6.3.2}$$

由是

$$0\leqslant\frac{1}{2}\sum_1^n mb_m\leqslant 2n,$$

从而

$$\left|\sum_1^n\frac{m}{n+1}b_m\sin m\theta\right|\leqslant 4. \tag{6.3.3}$$

最后,在(6.3.1)中取 $N=n$, 又将它与(6.3.2)相结合,即得

$$\left|\sum_1^n b_m\sin m\theta\right|\leqslant 5.$$

(ii) 若 f 为连续,则 σ_n 一致地趋向于 f. 因此可以写 $f=\sigma_n+g$, 其中 $n=n(\varepsilon)$, 而对于一切 θ, $|g|<\varepsilon$. σ_n 的系数并不超过 f 的对应的系数, 因此 g 的系数是 $\geqslant 0$ 的. 由(i)推得: 对于一切 m 和 θ 有 $|s_m(\theta,\ g)|<5\varepsilon$. 同时当 $q>p\geqslant n$ 时 $s_p(\theta,\ \sigma_n)=s_q(\theta,\ \sigma_n)=\sigma_n(\theta)$; 从而

$$|s_q(\theta,\ f)-s_p(\theta,\ f)|=|s_q(\theta,\ g)-s_p(\theta,\ g)|<10\varepsilon.$$

因此 f 的 Fourier 级数一致收敛.

以为此时 f 必为连续的主张是不正确的: § 3.7 中级数 S 就是一个反例.

将这些定理与定理 34 和 35 对照起来是有趣的. 如果 f 为偶函数, 在 $(0,\ 2\pi)$ 上是凸的,那末由定理 35 得到 $a_n\geqslant 0(n>0)$. 如果 f 还是有界的,那末它是连续的; 这个结论可以不用 Fourier 级数的方法而直接由凸函数的一般性质推得. 如果 f 为奇函数且在 $(0,\ 2\pi)$ 上是递减的,则由定理34, $b_n\geqslant 0$, 从而 $s_n(\theta)$ 为一致有界. 自然,定理 57 含义较广.

6.4 Kolmogoroff 的另一定理 若 $f\in L^2$, 则 $s_n\to f\,(L^2)$, 又由定理 2, 存在着一个子序列 (s_{n_ν}), 它几乎处处收敛于 f. 现在我们将证明, 存在一个与 f 无关的 (n_ν). 我们从更一般的定理来引证这个结果, 而且不必假定 f 属于 L^2. 如果一个三角级数当 $n_\nu<n\leqslant n'_\nu$ 时 a_n 和 b_n 均为零,则称这个级数具有缺口 $(n_\nu,\ n'_\nu)$.

定理 83. 若 f 的 Fourier 级数有无穷多个缺口 (n_ν, n'_ν)，其中 $n'_\nu/n_\nu \geqslant \lambda > 1$，则 $s_{n_\nu} \to f$ 几乎对于一切 θ 成立.

由于 $\sigma_n \to f$ 几乎处处成立，所以

$$\begin{aligned}(n'_\nu - n_\nu)(s_{n_\nu} - f) &= (s_{n_\nu+1} - f) + \cdots + (s_{n'_\nu} - f)\\ &= (n'_\nu + 1)(\sigma_{n'_\nu} - f) - (n_\nu + 1)(\sigma_{n_\nu} - f)\\ &= o(n'_\nu)\end{aligned}$$

几乎处处成立. 因为 $(\lambda-1)n'_\nu \leqslant \lambda(n'_\nu - n_\nu)$，从而推得 $s_{n_\nu} - f \to 0$ 几乎处处成立.

定理 84. 若 $f \in L^2$ 又 $n_{\nu+1}/n_\nu \geqslant \lambda > 1$，则 $s_{n_\nu} \to f$ 几乎对于一切 θ 成立.

我们可以假设 $n_0 = 0$ 和 $n_{\nu+1} > n_\nu$. 记

$$P_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad P_\nu = \sum_{n_{\nu-1}+1}^{n_\nu} A_n(\theta) \quad (\nu > 0);$$

又由

$$T_0 = P_0 + P_2 + P_4 + \cdots, \quad T_1 = P_1 + P_3 + P_5 + \cdots$$

定义两个三角级数 T_0 和 T_1：将 P_ν 的各项全部写出来，而用零系数将它分离开来. 因为 $\sum(a_n^2 + b_n^2) < \infty$，所以 T_0 和 T_1 分别是满足定理 83 的函数 f_0 和 f_1 的 Fourier 级数，又 $f_0 + f_1 = f$. 同时对于每一个 ν，n_ν 或者是这些级数的每一个的缺口的开始的阶数，或者是末尾的阶数，所以 $s_{n_\nu}(f_0) \to f_0$，$s_{n_\nu}(f_1) \to f_1$，从而 $s_{n_\nu}(f) = s_{n_\nu}(f_0) + s_{n_\nu}(f_1) \to f$ 几乎处处成立.

6.5 Fourier 级数的强性求和 若 s_n 是一个 Fourier 级数的部分和，则由 Fejér 定理及其扩充知道：在某些情况下成立着

(6.5.1) $$\sum_0^n (s_m - c) = o(n);$$

这可能被认为是由于不同的项 $s_m - c$ 相互抵消之故. 下面的定理指出：(6.5.1) 的正确性并非由于上述原因而是由于多数的 $s_m - c$ 本身是小的.

定理 85. 若 f 是实的，且靠近 $t=\theta$ 处属于 L^2；又

$$\int_0^t \{\phi(\theta, u)-c\}^2 du = o(t); \tag{6.5.2}$$

则成立着

$$\sum_0^n \{s_m(\theta)-c\}^2 = o(n), \tag{6.5.3}$$

$$\sum_0^n |s_m(\theta)-c| = o(n). \tag{6.5.4}$$

特别，当 $\phi(+0)$ 存在时，$c=\phi(+0)$，而在连续点处，$c=f(\theta)$. 若 f 在 $(-\pi, \pi)$ 属于 L^2，则 (6.5.3) 和 (6.5.4) 对于几乎一切 θ 成立，而 $c=f(\theta)$.

我们只要考虑 (6.5.3)，因为 (6.5.4) 可由 (6.5.3) 以及 Cauchy 不等式得到. 我们所考虑的(除掉定理的最后一段)是局部现象，所以由定理 52 可以假设 f 在 $(-\pi, \pi)$ 属于 L^2. 因此

$$s_n - c = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g_c(t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt + o(1) = \frac{2}{\pi}u_n + o(1),$$

从而我们必须证明

$$F(t) = \int_0^t g_c^2(u)\,du = o(t) \tag{6.5.5}$$

包含着

$$S_n = \sum_1^n u_m^2 = o(n). \tag{6.5.6}$$

记

$$U_n(t) = \sum_1^n u_m \sin mt, \quad \Omega_n = \sum_1^n |u_m|.$$

则

$$|U_n| \leqslant \Omega_n, \ |U_n| \leqslant nt\Omega_n, \ \Omega_n^2 \leqslant nS_n, \ \int_0^\pi U_n^2 dt = \frac{1}{2}\pi S_n.$$

同时

$$S_n = \int_0^\pi \frac{gU_n}{t}\,dt = \left(\int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/n}^\pi\right)\frac{gU_n}{t}\,dt = J_1 + J_2.$$

此地

$$J_1^2 \leqslant \int_0^{\pi/n} g^2 dt \int_0^{\pi n} \frac{U_n^2}{t^2} dt \leqslant n^2 \Omega_n^2 \cdot \frac{\pi}{n} \int_0^{\pi/n} g^2 dt = o(\Omega_n^2) = o(nS_n),$$

而

$$J_2^2 \leqslant \int_0^{\pi} U_n^2 dt \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{g^2}{t^2} dt = \frac{1}{2} \pi S_n \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{g^2}{t^2} dt.$$

由(6.5.5),最后一个积分是

$$\frac{F(\pi)}{\pi^2} - \frac{n^2}{\pi^2} F\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2\int_{\pi/n}^{\pi} \frac{F}{t^3} dt \leqslant O(1) + \int_{\pi/n}^{\pi} o\left(\frac{1}{t^2}\right) dt = o(n);$$

从而 $J_2^2 = o(nS_n)$. 于是推得

$$S_n^2 \leqslant 2(J_1^2 + J_2^2) = o(nS_n),$$

这就是(6.5.6).

剩下来要证明的是(6.5.2) 对 $c=f(\theta)$ 几乎处处满足; 为此只要证明

$$I = \int_0^t \{f(\theta+u) - f(\theta)\}^2 du = o(t)$$

几乎处处成立. 但是

$$\{f(\theta+u) - f(\theta)\}^2 = f^2(\theta+u) - f^2(\theta) - 2f(\theta)\{f(\theta+u) - f(\theta)\}.$$

所以

$$I \leqslant \int_0^t |f^2(\theta+u) - f^2(\theta)| du + 2|f(\theta)| \int_0^t |f(\theta+u) - f(\theta)| du,$$

因为 f 属于 L^2, 从而每一项几乎处处为 $o(t)$.

为了表明(6.5.4),通常说成: $T(f)$ 是(C, 1)强性可和于 c.

6.6 其它求和法 假设 $\phi(x)$ 及其最初两阶导数当 $x \geqslant 0$ 时为连续,又设

$$\mu_m = O(m^{-1}) \tag{6.6.1}$$

和

$$\Delta_n(m)=\phi(n\mu_m)-\phi\{(n+1)\mu_m\};$$

$$\Delta_n^2(m)=\Delta_n(m)-\Delta_{n+1}(m).$$

则由中值定理可以直接证明

$$\Delta_n(m)=O(m^{-1}),\quad \Delta_n^2(m)=O(m^{-2}) \tag{6.6.2}$$

对 $n<m$ 一致地成立.

此外又假设 $\sum u_n$ 为一无穷级数; s_n 及 σ_n 为其部分和及 n 阶的(C, 1)部分和,即

$$(n+1)\sigma_n=s_0+s_1+\cdots+s_n;$$

又设

$$t_m=\sum_{n=0}^{m}u_n\phi(n\mu_m). \tag{6.6.3}$$

因为

$$t_m=\sum_{n=0}^{m-1}s_n\Delta_n(m)+s_m\phi(m\mu_m), \tag{6.6.4}$$

所以 t_m 是在 § 5.2 意义下 s_n 的一个变换.

定理 86. (i) 若 $\sum u_n$ 收敛于 s, 则 $t_m\to s\phi(0)$.

(ii) 若 $\sum u_n$ (C, 1) 可和于 s, 则

$$T_m=t_m-(s_m-s)\phi(m\mu_m)\to s\phi(0). \tag{6.6.5}$$

如果再设 $\mu_m=a/m$ 和 $\phi(a)=0$, 则 $t_m\to s\phi(0)$.

我们只须证明(6.6.5),其它各段均为推论.

对(6.6.4)经过和差变换,我们得到

$$t_m=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\sigma_n\Delta_n^2(m)+m\sigma_{m-1}\Delta_{m-1}(m)+s_m\phi(m\mu_m). \tag{6.6.6}$$

若取 $u_0=1$, $u_n=0\,(n>0)$, 则对一切 n, $s_n=1$ 和 $\sigma_n=1$, 于是上式成为

$$\phi(0)=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\Delta_n^2(m)+m\Delta_{m-1}(m)+\phi(m\mu_m); \tag{6.6.7}$$

合并(6.6.6)和(6.6.7)就得到

$$T_m-s\phi(0)=\sum_n\alpha_{m,n}(\sigma_n-s), \tag{6.6.8}$$

其中 $\alpha_{m,n}$ 当 $n<m-1$, $n=m-1$ 和 $n\geqslant m$ 时分别为 $(n+1)\Delta_n^2(m)$, $m\Delta_{m-1}(m)$ 和 0. 由(6.6.2)显然看到，当 n 固定 $m\to\infty$ 时 $\alpha_{m,n}\to 0$. 并且

$$(6.6.9)\qquad \sum_n |\alpha_{m,n}| \leqslant H\left(\sum_{n<m-1}\frac{n+1}{m^2}+\frac{m}{m}\right)<2H.$$

从而定理 68 的开始两个条件是满足的，所以当 $\sigma_n\to s$ 时 $T_m\to s\phi(0)$.

应该注意(6.6.5)在某些情形下仍旧是正确的，此时 $\sigma_m\to s$，但 u_n 依赖于 n 同时也依赖于 m(从而假设不能叙述为关于 $\sum u_n$ 的求和). 若 $\sigma_n=\sigma_n(m)$ 为一致有界，而当 m 和 n 趋向 ∞ 时 $\sigma_n(m)\to s$，即当 $m\geqslant M(\varepsilon)$, $n\geqslant M(\varepsilon)$ 时 $|\sigma_n-s|\leqslant\varepsilon$，则 $T_m\to s\phi(0)$. 因为此时由(6.6.8)和(6.6.9)，当 $m\geqslant M(\varepsilon)$ 时有

$$|T_m-s\phi(0)|\leqslant\sum_0^N|\alpha_{m,n}||\sigma_n-s|+\sum_{N+1}^\infty|\alpha_{m,n}||\sigma_n-s|$$
$$\leqslant o(1)+2H\varepsilon.$$

6.7 应用 定理 86 在三角级数论中有多方面的应用.

(i) 若 $u_0=\frac{1}{2}a_0$，当 $n>0$ 时 $u_n=A_n(\theta)$，于是 $\sum u_n(\theta)$ 是 $T(\theta)$，则

$$\frac{1}{2}\{s_m(\theta+\mu_m)+s_m(\theta-\mu_m)\}=\sum_0^m u_n\cos n\mu_m,$$

这就是 $\phi(t)=\cos t$ 时的 t_m. 所以我们得到

定理 67. 若 $T(\theta)$ 为(C, 1)可和于 s，又 $\mu_m=O(m^{-1})$，则

$$(6.7.1)\qquad \frac{1}{2}\{s_m(\theta+\mu_m)+s_m(\theta-\mu_m)\}$$
$$-\{s_m(\theta)-s\}\cos m\mu_m\to s.$$

特别，当 ρ 是一个奇整数时，

$$(6.7.2)\qquad \frac{1}{2}\left\{s_m\left(\theta+\frac{\rho\pi}{2m}\right)+s_m\left(\theta-\frac{\rho\pi}{2m}\right)\right\}\to s.$$

这样，如果 T 是函数 f 的 Fourier 级数而 θ 是 f 的跳跃点，$s=\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$，那末(6.7.2)成立，又(6.7.2)对 $s=f(\theta)$

几乎处处是正确的.

(ii) §6.6的公式对§3.12的"Gibbs 现象"得到补充的阐明. 我们首先注意到，如果 f 在 θ 连续，那末它在一个围绕 θ 的区间上为有界，所以 f 的 Fourier 级数在 $t=\theta+h$ 处的(C, 1)平均值 $\sigma_m(\theta+h)$，对于微小的 h 和一切 m 是有界的；并且根据(5.5.2)，$\sigma_m(\theta+h)$ 当 $h\to 0$ 和 $m\to\infty$ 时趋向于 $f(\theta)$. 此外，

$$\frac{1}{2}\left\{s_m(\theta+h_m)+s_m\left(\theta+h_m+\frac{\pi}{m}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^m A_n\left(\theta+h_m+\frac{\pi}{2m}\right)\cos\frac{n\pi}{2m}$$

就是§6.6中的 t_m，由 $T\left(\theta+h_m+\frac{1}{2}\pi m^{-1}\right)$ 对 $\phi(t)=\cos t$ 和 $\mu_m=\frac{1}{2}\pi m^{-1}$ 所组成. 因为 $\phi(m\mu_m)=0$，所以 $T_m=t_m$. 而由定理86和§6.6末的注解推得：若 $f(t)$ 在 $t=\theta$ 为连续且 $h_m\to 0$，则

$$\frac{1}{2}\left\{s_m(\theta+h_m)+s_m\left(\theta+h_m+\frac{\pi}{m}\right)\right\}\to f(\theta). \tag{6.7.3}$$

现在我们可以证明

定理 88. (i) 在 f 的一跳跃点的 Gibbs 集中至少包含介于

$$c\pm\frac{d}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$$
$$\pm\frac{f(\theta+0)-f(\theta-0)}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}dt$$

的线段.

(ii) f 连续点处的 Gibbs 集是一个以 $f(\theta)$ 为中心的线段(它可以退缩为一点或者包含全实轴).

定理的第二段由(6.7.3)立即可推得，因若 $s_m(\theta+h_m)\to f(\theta)+\zeta$ 而 $h'_m=h_m-\pi m^{-1}$，则

$$s_m(\theta+h'_m)\to f(\theta)-\zeta.$$

要证明第一段，我们首先注意到，由 $\sigma_m(\theta, f)\to c$ 和 f 的 Fourier 常数趋向于0，从而存在着子序列 (m_ν)，使

(6.7.4) $$s_{m_\nu}(\theta,\ f)\to c.$$

其次，我们记(如 §§ 3.12 及 5.5)

$$g(t)=f(t)-\frac{d}{\pi}\mathrm{f}(t-\theta)=f(t)-k(t),$$

和 $g(\theta)=c$，于是 g 在 θ 连续．由(6.7.3)推得：当 $h_m\to 0$ 时，

$$\chi_m(g)=\frac{1}{2}\left\{s_m(\theta+h_m,\ g)+s_m\left(\theta+h_m+\frac{\pi}{m},\ g\right)\right\}\to c,$$

从而

$$\chi_m(f)=c+\chi_m(k)+o(1).$$

先取 $h_m=0$，然后取 $h_m=-\pi/m$，利用 § 3.12 中关于 k 的 Fourier 级数，可以看到

$$\frac{1}{2}\left\{s_m(\theta,\ f)+s_m\left(\theta\pm\frac{\pi}{m},\ f\right)\right\}\to c\pm\frac{d}{2\pi}\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}dt.$$

由(6.7.4)推得，对于适当的数列(m_ν)，有

$$s_{m_\nu}\left(\theta\pm\frac{\pi}{m_\nu},\ f\right)\to c\pm\frac{d}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}dt.$$

这就完成了证明．

6.8 共轭函数的存在性

现在我们证明

定理 89. 若 $f\in L$，则

$$\tilde{f}(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\psi(\theta,\ t)\cot\frac{1}{2}t\,dt$$

作为 Cauchy 积分是对于几乎一切 θ 存在的．

我们可以假设 f 是实的而 $a_0=0$．将记号稍加改变，记

$$\tilde{f}_\eta=\frac{1}{2\pi}\int_\eta^\pi\psi\cot\frac{1}{2}t\,dt,\quad \mathrm{f}_\eta=\frac{1}{\pi}\int_\eta^\pi\frac{\psi}{t}dt.$$

我们必须证明：$\tilde{f}_\eta$ 或者 f_η 当 $\eta\to+0$ 时几乎处处趋向于一个极限．

(1) 首先假设 $f\in L^2$，则 $\sum(a_n^2+b_n^2)<\infty$，因而有一个 L^2 中的 g，其 Fourier 级数为 $\sum B_n(\theta)$；而由定理 75，$\sum B_n(\theta)r^n$ 几乎处处趋向于 $g(\theta)$．同时，由定理 76，当 $\eta=\arcsin(1-r)$ 时 $\sum B_n(\theta)r^n$

$-\tilde{f}_\eta(\theta)$ 几乎处处趋向于 0. 将这些结果合并起来就看到几乎处处成立着 $\tilde{f}_\eta(\theta)\to g(\theta)$.

(2) 转到一般的情形，我们定义依赖于 ε 的集 S 和 S^* 如下. 为方便起见用 $\bar{E}$ 表示 E 在 $(0, 2\pi)$ 的余集，而以 e 表示测度 mE.

若

$$F(\theta)=\int_0^\theta f(t)\,dt,$$

则 F 是连续的和周期的，$F(0)=F(2\pi)=0$, $F'\equiv f$. 由 Egoroff 定理(ii)，存在着闭集 S 使得

(a) $s>2\pi-\varepsilon$, (b) $|f|\leqslant M=M(\varepsilon)$,

(c) 在 S 中一致地成立着 $\dfrac{F(\theta+h)-F(\theta)}{h}\to f$.

由(c)推得：若 θ (但 $\theta+h$ 不一定)在 S 内而 $|h|\leqslant H=H(\varepsilon)$，则

$$|F(\theta+h)-F(\theta)|\leqslant 2M|h|. \tag{6.8.1}$$

集 $\bar{S}$ 为一列不相重迭的开区间 Δ_n 或 (ξ_n, η_n) 的和集，且 $\bar{s}=\sum\delta_n<\varepsilon$. 若 0 和 2π 不是 S 的点，我们可以把它们算作 Δ_n 的端点；所有其它端点属于 S. 若将每一个 Δ_n 关于它的中心延长三倍，弃去在 $(0, 2\pi)$ 以外的部分，而将所有重迭的区间合并起来，于是我们得到一个新的开区间集. 它的余集是一个含在 S 内的闭集 S^*，且 $s^*>2\pi-3\varepsilon$. 只要证明 $\tilde{f}$ 在 S^* 内几乎处处存在就行了.

我们定义一个连续的和周期的函数 $P(\theta)$，它当 $\theta=0$, 2π 和属于 S 时等于 $F(\theta)$，而在每一个 Δ_n 内成线性函数，则

$$P(\theta)=\int_0^\theta p(t)\,dt,$$

于此

$$p=f\ (\text{在 } S \text{ 内}),\quad p=\frac{F(\eta_n)-F(\xi_n)}{\delta_n}\ (\text{在 } \Delta \text{ 内}).$$

因 $\sum\delta_n<\infty$，故 $\delta_n<H$ (当 n 足够大时，设 $n>N$). 若 θ 在 Δ_n 内又 $n>N$，则 $0<\theta-\xi_n<H$ 和 $0<\xi_n<2\pi$，因而 ξ_n 属于 S. 所以由(6.8.1)，

(6.8.2) $$|F(\theta)-F(\xi_n)|\leqslant 2M\delta_n.$$

特别 $|F(\eta_n)-F(\xi_n)|\leqslant 2M\delta_n$. 于是 p 为有界，从而由 (1)，$\tilde{p}$ 几乎处处存在. 因此，若记

$$Q(\theta)=F(\theta)-P(\theta)=\int_0^\theta (f-p)d\theta=\int_0^\theta q\,dt,$$

我们只需证明 $\tilde{q}$ 存在或者证明 q_η 在 S^* 内几乎处处趋向于一个极限.

显然，Q 是连续的和周期的，当 $\theta=0$, 2π 和属于 S 时 $Q=0$，而且还存在一个 $C=C(\varepsilon)$ 使对一切 θ 成立着

(6.8.3) $$|Q(\theta)|\leqslant C.$$

同时，若 θ 在 $\varDelta_n$ 内和 $n>N$，则由 (6.8.2) 和 (6.8.4)，

(6.8.4) $$|P(\theta)-P(\xi_n)|=\left|\frac{\theta-\xi_n}{\delta_n}\{F(\eta_n)-F(\xi_n)\}\right| \leqslant |F(\eta_n)-F(\xi_n)|\leqslant 2M\delta_n,$$

(6.8.5) $$|Q(\theta)|=|Q(\theta)-Q(\xi_n)| \leqslant |F(\theta)-F(\xi_n)|+|P(\theta)-P(\xi_n)| \leqslant 4M\delta_n.$$

(3) 现在假设 θ 在 S^* 内. 则

(6.8.6) $$q_\eta=\frac{1}{\pi}\int_\eta^\pi\frac{q(\theta+t)-q(\theta-t)}{t}dt =\frac{1}{\pi}\left[\frac{Q(\theta+t)+Q(\theta-t)}{t}\right]_\eta^\pi+\frac{1}{\pi}\int_\eta^\pi\frac{Q(\theta+t)+Q(\theta-t)}{t^2}dt =u_\eta+v_\eta.$$

因为几乎处处成立着

$$\frac{Q(\theta\pm\eta)}{\eta}=\frac{Q(\theta\pm\eta)-Q(\theta)}{\eta}\to\pm q(\theta),$$

所以 u_η 几乎处处趋向于一个极限.

最后我们必须证明 v_η 几乎处处趋向于一个极限，而这只要证明

$$I(\theta)=\int_0^\pi\frac{|Q(\theta\pm t)|}{t^2}dt<\infty$$

在 S^* 上几乎处处成立. 取上面一个符号就有

$$\int_{S^*} I(\theta)\,d\theta = \int_{S^*} d\theta \int_\theta^{\pi+\theta} \frac{|Q(t)|}{(t-\theta)^2}\,dt$$
$$\leqslant \int_0^{4\pi} |Q(t)|\,dt \int_{S^*} \frac{d\theta}{(t-\theta)^2}.$$

若 t 在 S 内, 则 $Q(t)=0$. 若 t 在 $\varDelta_n$ 内和 θ 在 S^* 内, 则 $|\theta-t|\geqslant\delta_n$, 所以

$$\int_{S^*} \frac{d\theta}{(t-\theta)^2} \leqslant \int_{\delta_n}^\infty \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\delta_n};$$

因此, 由 (6.8.3) 和 (6.8.5),

$$\int_{S^*} I(\theta)\,d\theta \leqslant 2\sum \frac{1}{\delta_n}\int_{\varDelta_n} |Q|\,dt \leqslant 2\sum_{n\leqslant N} C + 8M\sum_{n>N}\delta_n < \infty.$$

这就证明了定理. 如 §5.8 中所指出, 现在已推得: 任何一个 Fourier 级数的共轭级数几乎处处 (C, 1) 可和或 A 可和于 $\bar{f}(\theta)$.

6.9 Fourier 级数的收敛因子 我们已经看到, 所有 Fourier 级数及其共轭级数是由不同的方法 "几乎处处近于收敛" 的. 下列定理是一个更精确的方法.

定理 90. 若 $f \sim (a_n,\ b_n)$, 则级数

$$\sum_1^\infty \frac{A_n(\theta)}{\log(n+1)}, \quad \sum_1^\infty \frac{B_n(\theta)}{\log(n+1)}$$

几乎对于一切 θ 收敛.

若 s_n 和 σ_n 分别是 $\sum u_n$ 的部分和以及 (C, 1) 平均值, 则 (如 §6.6) 对任何 (λ_n),

$$\sum_0^n \lambda_m u_m = \sum_0^{n-2} (m+1)\sigma_m \varDelta^2\lambda_m + n\sigma_{n-1}\varDelta\lambda_{n-1} + \lambda_n s_n.$$

若 $\lambda_n = \{\log(n+1)\}^{-1}\ (n>0)$ 和 $\lambda_0 = 2\lambda_1$, 则由 (3.6.8), $n\varDelta\lambda_{n-1}\to 0$, $\varDelta^2\lambda_m > 0$ 和 $\sum(m+1)\varDelta^2\lambda_m < \infty$; 于是当 σ_m 为有界以及 $\lambda_n s_n \to 0$ 时 $\sum\lambda_m u_m$ 收敛. 若 $\sum u_n$ 为一 Fourier 级数或是它的共轭级数, 则两个条件都几乎处处成立, 所以由定理 73 和 74 证得第一个级数几

乎处处收敛，而由定理 64 知，第二个级数也是几乎处处收敛.

6.10 Kuttner 定理 定理 74, 86 和 89 引导我们得到一个重要的定理，它联系着 Fourier 级数和它的共轭级数的收敛性.

定理 91. 一个三角级数 $T(\theta)$ 若在一正测度集 E 上收敛，又其共轭级数 $\tilde{T}(\theta)$ 为 (C, 1) 可和，则 $\tilde{T}(\theta)$ 在 E 上几乎处处收敛. 特别，若一个 Fourier 级数在 E 上收敛，则其共轭级数在 E 上几乎处处收敛.

第二段是第一段的推论，因为 Fourier 级数的共轭级数是几乎处处 (C, 1) 可和的.

其次，若 $s_m(\theta)$ 为 $T(\theta)$ 的部分和，则

$$\frac{1}{2}\{s_m(\theta+\mu_m)-s_m(\theta-\mu_m)\}=\sum_1^m B_n(\theta)\sin n\mu_m$$

为 § 6.6 的 t_m，由 $\tilde{T}(\theta)$ 对 $\phi(t)=\sin t$ 所组成. 所以，如果 $\tilde{T}(\theta)$ 在 E 上 (C, 1) 可和于 $\tilde{s}(\theta)$ 且 $\mu_m=O(m^{-1})$，则由定理 86，在 E 上

$$\frac{1}{2}\{s_m(\theta+\mu_m)-s_m(\theta-\mu_m)\} - \{\tilde{s}_m(\theta)-\tilde{s}(\theta)\}\sin m\mu_m\to 0. \tag{6.10.1}$$

因为 $T(\theta)$ 在 E 上收敛，所以由 Egoroff 定理 (i)，$T(\theta)$ 在 E 的一个具有 $mE^*>mE-\varepsilon$ 的子集 E^* 上一致收敛. 我们将要证明 $\tilde{T}(\theta)$ 在 E^* 上几乎处处收敛. 若 χ 为 E^* 的特征函数，则 χ 对于 E^* 中几乎一切 θ 乃是其积分的导数，而我们只需要考虑这种 θ. 对于这种 θ，

$$m\int_{\theta+m^{-1}}^{\theta+2m^{-1}}\chi\,dt\to 2-1=1,\quad m\int_{\theta-2m^{-1}}^{\theta-m^{-1}}\chi\,dt\to 1,$$

从而对于大的 m，

$$I_m(\theta)=\frac{1}{2}m\left(\int_{\theta-2m^{-1}}^{\theta-m^{-1}}+\int_{\theta+m^{-1}}^{\theta+2m^{-1}}\right)\chi\,dt>\frac{1}{2}.$$

于是推得：存在着点 $\theta-\mu_m$ 和 $\theta+\mu_m$，这里 $m^{-1}\leqslant\mu_m\leqslant 2m^{-1}$，它们都属于 E^* $\left(否则 I_m 至多为 \frac{1}{2}\right)$；而对这种 θ 和 μ_m，(6.10.1)是正确的。同时由于 $T(\theta)$ 在 E^* 上一致收敛，所以 $s_m(\theta+\mu_m)-s_m(\theta-\mu_m)\to 0$，于是

$$\{\tilde{s}_m(\theta)-\tilde{s}(\theta)\}\sin m\mu_m\to 0.$$

但 $\sin m\mu_m>\sin 1$；从而 $\tilde{s}_m(\theta)\to\tilde{s}(\theta)$。这是在 E^* 上几乎处处成立的，又因 ε 是任意的，所以它在 E 上也是几乎处处成立的。

VII. 一般三角级数

7.1 通论 有不同的方法可以把一个函数 f 和一个三角级数 T 联系起来. 其中首先是在前几节中作为基础的把 T 考虑为 f 的 Fourier 级数.

可是一个三角级数未必是 Fourier 级数, 这样, 对于一个已给的三角级数, 第一个问题就是如何判断它是否为 Fourier 级数. 也可以通过其它自然的方法把函数同级数联系起来. 特别是当级数收敛的时候, 这时, 我们就会发生这样的问题: 当一个三角级数收敛时, 这级数是否就是其和函数的 Fourier 级数. 显然, 这个问题的解答不能是无条件地正面的, 因为和函数可能是不可以积分的. 例如级数(1.3.3)对一切 θ 均收敛, 但和函数显然是不可积的.

级数的和函数为 0 的特殊情形是特别重要的. 假若对一切 θ, T 都收敛于 0, 那末这级数是否一定是 0 的 Fourier 级数呢? 也就是说, 当 T 对 $[-\pi, \pi]$ 中的一切 θ 都收敛于 0 时, 是否一切 $a_n=0$ 和 $b_n=0$, 从而 T 就恒等于 0 呢? 显然, 这也就等于说: 两个不同的三角级数不能对一切 θ 都收敛于同一函数; 由于这个缘故, 这问题所以也称为"唯一性"问题.

上面所提出的问题, 大部分已由 Riemann, Heine, Cantor, du Bois-Reymond 以及 de la Vallée-Poussin 等人所解决; 而且答案大部分都是正面的. 就是说, 当 T 对一切 θ 都收敛于 0 时, 那末它一定恒等于 0; 说得更一般些, 假若 T 收敛于一个函数 f, 而只要 f 满足一些"自然"的条件, 那末 T 就是 f 的 Fourier 级数. 事实上, 下面我们将看到更一般的命题也是成立的, 因为我们可以允许在某一个例外集上级数不收敛.

当然，不同的三角级数可以在$(-\pi, \pi)$中的同一真子集上收敛于0. 例如，若$f\in L$，并且在(a, b)上为0，其中$-\pi<a<b<\pi$，那末f的 Fourier 级数在(a, b)内的任一闭区间$\langle\alpha, \beta\rangle$上是一致收敛于0的.

7.2 收敛的三角级数的系数 若$T(\theta)$对于一个特殊的θ是收敛的，则$A_n(\theta)\to 0$，但是a_n和b_n未必趋于0; 例如$\sum\sin(n!\theta)$在θ是π的任何有理倍数时都收敛，但系数显然不趋于0. 但是，假若$T(\theta)$在一正测度的集上收敛，那末它的系数必趋于0.

定理 92. 若在一个正测度集E上$A_n(\theta)\to 0$，特别，若$T(\theta)$收敛，则$a_n\to 0$, $b_n\to 0$.

设
$$A_n(\theta)=\rho_n\cos(n\theta+\mu_n),$$
其中$\rho_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$. 假设$\rho_n$不趋于0，于是必有一正数$\delta$和一列$(n_k)$，使$\rho_{n_k}>\delta$，但在$E$上却有$\cos(n_k\theta+\mu_{n_k})\to 0$. 因此（由于余弦函数系是一致有界的），
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(n_k\theta+\mu_{n_k})\chi(\theta)\,d\theta=\int_E\cos^2(n_k\theta+\mu_{n_k})\,d\theta\to 0,$$
其中$\chi(\theta)$表示E的特征函数. 但是上式左方的积分是
$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\chi\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2(n_k\theta+\mu_{n_k})\chi\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\,mE+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2(n_k\theta+\mu_{n_k})\chi\,d\theta,$$
而根据定理30，它应收敛于$\frac{1}{2}mE>0$. 这矛盾表示$\rho_n\to 0$.

7.3 Riemann 求和法 研究§7.1中提到的问题的基本方法是属于 Riemann 的. 若$T(\theta)$在一正测度集上收敛，则由定理92，a_n和b_n趋于0，而级数

$$\frac{1}{2}a_0\theta^2-\sum_1^\infty\frac{A_n(\theta)}{n^2}=\frac{1}{2}a_0\theta^2-\Psi(\theta)=\Phi(\theta) \tag{7.3.1}$$

绝对收敛，且一致收敛于某连续的和函数. 这级数是将原来级数

形式上积分两次得到的. Riemann 解决上述问题的基本思想是:从 $\Phi(\theta)$ 通过“广义二次导数”求出 $T(\theta)$.

现在假设 $T(\theta)$ 是系数趋于 0 的任意的三角级数,再如(7.3.1)定义函数 $\Phi(\theta)$. 假如(对任意 g)写着

$$\Delta_h^2 g(\theta)=g(\theta+h)+g(\theta-h)-2g(\theta), \tag{7.3.2}$$

则

$$R_h(\theta)=\frac{\Delta_{2h}^2(\theta)}{4h^2}=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty A_n(\theta)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2. \tag{7.3.3}$$

特别,当 $T(\theta)$ 为 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数时,由定理 44,经过逐项积分两次后得到

$$\frac{1}{2h^2}\int_0^{2h}\phi(\theta,\ t)\,(2h-t)\,dt=\frac{1}{2h^2}\int_0^{2h}dt\int_0^t\phi(\theta,\ u)\,du=R_h(\theta). \tag{7.3.4}$$

级数(7.3.3)当 $h=0$ 时形式上就变为级数 $T(\theta)$,因此,当 $T(\theta)$ 发散时,可以利用 $R_h(\theta)$ 来定义 $T(\theta)$ 的和. 一般地说,当 $h\to 0$ 时,若

$$u_0+\sum_1^\infty u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\to s, \tag{7.3.5}$$

则称级数 $\sum u_n$ 是 (R) 可和于 s, 且记作 $\sum u_n=s(\mathrm{R})$.

显然,由(7.3.4),当

$$\frac{1}{t}\int_0^t\phi(\theta,\ u)\,du\to s$$

时 $R_h(\theta)\to s$, 但由 § 4.3, $\frac{1}{t}\int_0^t\phi(\theta,\ u)\,du\to s$ 对 $s=f(\theta)$ 几乎处处成立. 因此, $f(\theta)$ 的 Fourier 级数几乎处处 R 可和于 $f(\theta)$, 特别是在 $f(\theta)$ 的连续点上.

R-求和法并不是 § 5.4 意义下的 K-求和法,因为它不满足(5.4.1). 但它有一个由(5.4.2)所定义的核, 而(5.4.4)和(7.3.4)表明, 这个核当 $0\leqslant\theta\leqslant 2h$ 时是 $\pi(2h-\theta)/4h^2$, 而当 $2h\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时为 0. 从而可以直接验证, 对 $0<\theta<\pi$ 有

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots=0(\mathrm{R}). \tag{7.3.6}$$

然而对我们最重要的是：R-求和法在§5.2意义下是正则的.

定理 93. 若 $\sum u_n$ 收敛于 s，则它必(R)可和于 s.

设 $s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$，$s_n\to s$，又把 $n=0$ 时的 $(\sin nh)/nh$ 理解为 1，于是

$$t(h)=\sum u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\sum s_n\Delta\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\sum \alpha_{h,n}s_n.$$

此地对每一 n，当 $h\to 0$ 时 $\alpha_{h,n}\to 0$. 而且 $\sum\alpha_{h,n}=1$；此外，

$$\sum_0^\infty|\alpha_{h,n}|=\sum_0^\infty\left|\int_{nh}^{(n+1)h}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt\right|$$
$$\leqslant\int_0^\infty\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right|dt.$$

因此，R-求和法满足定理 68 的条件(把离散参数换作连续参数)，从而是正则的.

定理 94. 若 $u_n\to 0$，则

$$h\sum_1^\infty u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\to 0.$$

事实上，如令

$$\alpha_{h,0}=\frac{2h}{\pi},\quad \alpha_{h,n}=\frac{2}{\pi}\ \frac{\sin^2 nh}{n^2h}\qquad(n>0),$$

则由 $t(h)=\sum\alpha_{h,n}u_n$ 所定义的变换是正则的. 因为当 $h\to 0$ 时 $\alpha_{h,n}\to 0$；且当 $h>0$ 时，由(3.8.5)，

$$\sum_0^\infty|\alpha_{h,n}|=\sum_0^\infty\alpha_{h,n}=\frac{2h}{\pi}+\frac{1}{\pi h}\sum_1^\infty\frac{1-\cos 2nh}{n^2}=1+\frac{h}{\pi},$$

从而当 $h\to 0$ 时，和趋于 1.

设 $\Phi(\theta)$ 由(7.3.1)所定义，且 a_n 和 b_n 趋于 0，于是由定理 94 和(7.3.3)得到

(7.3.7) $$\Delta_{2h}^2\Phi(\theta)=o(h).$$

7.4 连续函数的广义二阶导数 假设 $g(x)$ 连续，$\Delta_h^2g(x)$ 由(7.3.2)定义. 现在我们用

(7.4.1) $\overline{D}_2 g(x)=\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\Delta_h^2 g(x)}{h^2}$, $\underline{D}_2 g(x)=\underline{\lim_{h\to 0}}\frac{\Delta_h^2 g(x)}{h^2}$

分别定义为 $g(x)$ 的广义二阶上导数和广义二阶下导数. 若 $\overline{D}_2 g=\underline{D}_2 g$, 此共同值记作 $D_2 g$, 而称 $D_2 g$ 为 g 的广义二阶导数. 于是

$$\Delta_h^2(ax^2+bx+c)=2ah^2,\ D_2(ax^2+bx+c)=2a.$$

若 $g''(x)$ (对一特定的 x) 存在, 则 $D_2 g$ 存在且等于 $g''(x)$. 因为, 由 Cauchy 中值定理,

$$\frac{\Delta_h^2 g(x)}{h^2}=\frac{g'(x+\theta h)-g'(x-\theta h)}{2\theta h}\quad(0<\theta<1),$$

而右端的极限是 $g''(x)$.

所以根据(7.3.3), $T(\theta)=s(\mathrm{R})$ 等价于 $D_2\Phi(\theta)=s$.

若

(7.4.2) $$\Delta_h^2 g(x)=o(h),$$

则称 g 在 x 是光滑的. 在此情形下,

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}+o(1).$$

因此, 若以 D^+g, D_+g, D^-g 和 D_-g 依次表示 g 的右上, 右下, 左上和左下导数*), 则

$$D^+g=D^-g=\overline{D}g,\quad D_+g=D_-g=\underline{D}g,$$

式中 $\overline{D}g$ 和 $\underline{D}g$ 分别表示 g 的上导数和下导数.

于是从(7.3.7)可知: 若 $T(\theta)$ 的系数趋于 0, 则 $\Phi(\theta)$ 处处是光滑的.

7.5 关于凸函数的一个定理 若 g 是凸的, 则 $\Delta_h^2 g\geqslant 0$, 从而 $D_2 g\geqslant 0$. 另一方面, 若 g 有 $\geqslant 0$ 的二阶导数, 则 g 是凸的. 下面的定理拓广了这个熟知的事实, 而且对今后的讨论也是基本的.

定理 95. 若 g 在 (a, b) 内连续和光滑, 并且在 (a, b) 内除去可能一个可列集 E 而外, 有

*) 用加号和减号区别右边和左边.

(7.5.1) $$\overline{D}_2 g \geqslant 0,$$

则 g 是凸的. 若 $D_2 g \leqslant 0$(可能除 E 外),则 g 是凹的. 若 $D_2 g = 0$(可能除 E 外),则 g 是线性函数. 假若没有例外集, 则条件中的光滑可以略去.

我们只要证明第一种情形,因为将 g 的符号改变一下,就得到第二种情形. 第三件事是一个明显的推论. 最后,光滑这个条件仅在涉及到 E 时才是需要的.

(i) 我们可以假设(除 E 外)

(7.5.2) $$\overline{D}_2 g > 0.$$

因为如若定理在这比较强的条件下证明了,那末对于满足(7.5.1)的 g, 令

$$g_n = g + \frac{1}{2} n^{-1} x^2,$$

则 $\overline{D}_2 g_n = \overline{D}_2 g + n^{-1} > 0$. 从而对一切 n, g_n 是凸的; 因此, $g = \lim g_n$ 当然也是凸的.

(ii) 假设除 E 外, g 满足(7.5.2),但不是凸的. 那末我们可以证明 E 是非可列的,从而就证明了我们的定理.

因为 g 不是凸的, 故在 (a, b) 内有一子区间 $\langle\alpha, \beta\rangle$, 在其上,函数

$$d(x) = g(x) - \frac{(\beta - x) g(\alpha) + (x - \alpha) g(\beta)}{\beta - \alpha} = g(x) - mx - n$$

有时是正的; 从而对于充分靠近 m 的 μ, 函数

$$d_\mu(x) = g(x) - \mu x - n$$

在 $\langle\alpha, \beta\rangle$ 上有时也是正的. $d(x)$ 在 $\langle\alpha, \beta\rangle$ 中的最大值是正的,而且能被 $\langle\alpha, \beta\rangle$ 内的某一 x 所达到; 同理, $d_\mu(x)$ 也是这样. 因此必有 x_μ(离右端最远的给出最大值的点)使得 $\alpha < x_\mu < \beta$ 且

$$d_\mu(x) \leqslant d_\mu(x_\mu) \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \quad d_\mu(x) < d_\mu(x_\mu) \quad (x_\mu < x \leqslant \beta).$$

因为对于充分靠近 x_μ 的那种 x, 我们有 $d_\mu(x) \leqslant d_\mu(x_\mu)$, 故

$$\overline{D}_2 g(x_\mu) = \overline{D}_2 d_\mu(x_\mu) \leqslant 0;$$

但上式与(7.5.2)相矛盾,故 x_μ 为 E 中的点.

此外,又因 d_u 在 x_μ 处取最大值,故对充分小的 $h>0$, 有

$$\frac{d_\mu(x_\mu+h)-d_\mu(x_\mu)}{h}\leqslant 0,\quad \frac{d_\mu(x_\mu-h)-d_\mu(x_\mu)}{-h}\geqslant 0.$$

从而 $D^+d_\mu(x_\mu)\leqslant 0$ 和 $D_-d_\mu(x_\mu)\geqslant 0$. 所以 g 以及 d_μ 均为光滑;并且

$$\overline{D}d_\mu(x_\mu)\leqslant 0,\quad \underline{D}d_\mu(x_\mu)\geqslant 0^{*)}.$$

但 $\underline{D}d_\mu(x_\mu)\leqslant\overline{D}d_\mu(x_\mu)$, 因此其中每一个数都必须是 0. 这就是说, $d'(x_\mu)=0$ 以及 $g'(x_\mu)=\mu$. 所以我们得出这样的结论: 对于靠近 m 的每一个值 μ, 必有 E 的不同的点 x_μ, 从而 E 是非可列集.

今后我们还要用到一个推论即下述定理.

定理 96. 若 g 连续和光滑, 在 (a, b) 内可能除一可列集外 $\overline{D}_2g(x)\geqslant c$, 则对 $a<x-h<x+h<b$, 有

$$h^{-2}\Delta_h^2 g\geqslant c; \tag{7.5.3}$$

同理,若 $\underline{D}_2g\leqslant c$, 则 $h^{-2}\Delta_h^2 g\leqslant c$.

不妨就第一种情形进行证明,并设 $p=g-\frac{1}{2}cx^2$. 于是 $\overline{D}_2p\geqslant 0$,所以根据定理 95, p 是凸的,即 $\Delta_h^2 p\geqslant 0$, 这就是(7.5.3). 假若没有例外集,则光滑这个条件仍可略去.

7.6 Cantor 定理和 du Bois-Reymond 定理 现在我们将应用定理 93 至 96 于三角级数.为方便起见,我们只讨论收敛的级数,并且仅叙述有关收敛的定理,但是所有这些定理并没有用到收敛的全部力量. 事实上,以下二条件满足时,下面的定理也是成立的: 即 (a) 系数趋于 0, (b) 除一例外集外(R)可求和. 根据定理 92 和 93, 当级数收敛时, 以上二性质自然满足, 这也是唯一用到收敛的地方.

---

*) 参考 § 7.4 倒数第二段.

定理 97. 除一可列集外,假若两个三角级数处处收斂于同一和函数,那末这两个三角级数完全相同.

显然,我们只要证明:假若除一可列集外,某一三角级数处处收斂于 0,那末 $a_n=0$, $b_n=0$. 现在如同(7.3.1)那样定义 $\Phi(\theta)=\frac{1}{4}a_0\theta^2-\Psi(\theta)$. 因为 $T(\theta)$ 几乎处处收斂于 0,从而 a_n 和 b_n 趋于 0;因此 $\Psi(\theta)$ 一致收斂,$\Phi(\theta)$ 连续且光滑*). 又因 $T(\theta)$ 除 E 外收斂于 0,故在 E 外(R)可求和于 0;所以除 E 外,$D_2\Phi=0$. 这样,$\Phi(\theta)$ 是一线性函数 $A\theta-B$. 因 $\Psi(\theta)$ 有界,故 $a_0=0$;所以 $\Phi(\theta)$ 有界,$A=0$ 而 $\Psi(\theta)=B$. 最后,由于 $\Psi(\theta)$ 一致收斂,所以它是和函数的 Fourier 级数. 因此 $B=0$,从而对一切 n, $a_n=b_n=0$.

定理 98. 若 $T(\theta)$ 除一可列集 E 外收斂于一个有界函数 $f(\theta)$,则它就是 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数.

由于 f 有界可测,故 f 为可积. 若 M 是 $|f|$ 的上界(不考虑 E 的点),则除 E 外,由定理 96, $|D_2\Phi|\leqslant M$ 和 $|h^{-2}\Delta_h^2\Phi|\leqslant M$. 但

$$(7.6.1)\qquad a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_h(\theta)\cos n\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_{2h}^2\Phi(\theta)}{4h^2}\cos n\theta\,d\theta.$$

当 $h\to 0$ 时被积函数一致有界地几乎处处趋于 $f(\theta)\cos n\theta$, 因此,令 $h\to 0$, 我们有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta.$$

同理可证明 b_n 是 f 的 Fourier 正弦系数. 当 $f=0$ 时,本定理与定理 97 等价.

我们在本节的开始就说过:定理 97 和 98 的结论当 $T(\theta)$ 的系数趋于 0 且在 E 外(R)可求和时也是成立的. 假若没有例外集,那末它们还可以被拓广:我们可以用更一般的假设,即用条件"$\Sigma n^{-2}A_n(\theta)$ 是某一连续函数的 Fourier 级数"来代替 a_n, b_n 趋于 0 这个条件. 事实上,假若令 $\Psi(\theta)$ 为此函

---

*) 仍旧由 § 7.4 得到.

数，且设 $n>0$，那末

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(\theta)\cos n\theta\,d\theta=\frac{a_n}{n^2},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(\theta+2h)\cos n\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(\theta)\cos n(\theta-2h)\,d\theta,$$

从而

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_{2h}^2\Psi}{4h^2}\cos n\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Psi\,\Delta_{2h}^2\cos n\theta}{4h^2}\,d\theta$$
$$=\left(\frac{\sin nh}{h}\right)^2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi\cos n\theta\,d\theta,$$

这等价于(7.6.1)．关于 $T(\theta)$ 是 f 的 Fourier 级数可以和上面一样地证明：条件 a_n 和 b_n 趋于 0 仅是为了保证 Φ 的光滑性，当例外集 E 不存在时是不必要的．

所以得出这样的结论：假若 $\Psi(\theta)$ 是连续函数的 Fourier 级数，且 $T(\theta)$ 对于一切 θ 均为(R)可求和于有界函数 $f(\theta)$，那末 $T(\theta)$ 就是 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数．当然，这里即使有一个例外点，也是不允许的，例如

$$T(\theta)=\frac{1}{2}+\cos(\theta-\alpha)+\cos 2(\theta-\alpha)+\cdots$$

除 $\theta=\alpha$ 外处处 (R) 可求和于 0，而且 $\Psi(\theta)$ 一致收敛；但 $T(\theta)$ 却不是一个 Fourier 级数．

7.7 无界函数．de la Vallée-Poussin 定理 现在我们要把定理 98 拓广到无界函数的情形．首先将引进 de la Vallée-Poussin 的优势和劣势函数．假若 f 属于 $L(a, b)$，那末必有两个连续函数列 $p_n(x)$ 和 $P_n(x)$ 使

(i) $$p_n(a)=P_n(a)=0,$$

(ii) 在 $\langle a, b\rangle$ 内一致地成立着

$$p_n(x)\to\int_a^x f(t)\,dt,\quad P_n(x)\to\int_a^x f(t)\,dt,$$

(iii) 在 $f(x)$ 的值为有限处，

$$\overline{D}p_n(x)\leqslant f(x)\leqslant \underline{D}P_n(x).$$

定理 99．假设 $f(x)$ 在 (a, b) 内除一可列集 E 外为有限，并且在 (a, b) 上可积，又设 $g(x)$ 是光滑的连续函数，在 (a, b) 内除

E 外成立着

$$\underline{D}_2 g(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{D}_2 g(x).$$

则

(7.7.1)
$$g(x) - J(x) = g(x) - \int_a^x dt \int_a^t f(u) du$$

是 (a, b) 上的线性函数. 当例外集不存在时, 光滑性条件亦可略去.

我们取两个劣势及优势函数列 (p_n) 及 (P_n), 且由下式定义 q_n 及 Q_n:

$$q_n(x) = \int_a^x p_n(t) dt, \quad Q_n(x) = \int_a^x P_n(t) dt.$$

因为 q_n 和 Q_n 具有连续的导数, 因此它们自身都是光滑连续的; 并且它们一致收敛于 $J(x)$.

其次, 由 Cauchy 中值定理,

$$\frac{Q_n(x+h) - 2Q_n(x) + Q_n(x-h)}{h^2} = \frac{P_n(x+\theta h) - P_n(x-\theta h)}{2\theta h},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 故除 E 外,

$$\underline{D}_2 Q_n \geqslant \underline{D} P_n \geqslant f.$$

因而, 假若令

$$k(x) = J(x) - g(x), \quad K_n(x) = Q_n(x) - g(x),$$
$$k_n(x) = q_n(x) - g(x),$$

则

$$\overline{D}_2 K_n \geqslant \underline{D}_2 Q_n - \underline{D}_2 g \geqslant f - f = 0^{*)}.$$

同理 $\underline{D}_2 k_n \leqslant 0$. 根据定理 95, K_n 为凸而 k_n 为凹. 但当 $n \to \infty$ 时, K_n 和 k_n 均收敛于 k, 因此 k 是线性函数.

(7.7.1) 中的积分下限尚可换成 (a, b) 中的其它任何数.

现在容易证明

定理 100. 一个三角级数假若除了一个可列集 E 外处处收

---

*) $\overline{\lim}(u_n - v_n) \geqslant \underline{\lim}\, u_n - \underline{\lim}\, v_n$, 同样地, 此式对连续变量的函数也成立.

敛于一个有限的可积函数 f，那末这级数就是 f 的 Fourier 级数.

由于(7.3.1)中的函数 Φ 是光滑连续函数，并且除 E 外，$D_2\Phi=f$，因此可以把定理 99 中的 g 作为 Φ. 这样，

$$\Phi(\theta)-\int_0^\theta dt\int_0^t f(u)\,du=\Phi-J$$

是线性函数. 但若 $f\sim(\alpha_n,\ \beta_n)$，则

$$J-\frac{1}{4}\alpha_0\theta^2+\sum_1^\infty\frac{\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta}{n^2}$$

是线性的，从而

$$\frac{1}{4}(a_0-\alpha_0)\theta^2-\sum_1^\infty\frac{(a_n-\alpha_n)\cos n\theta+(b_n-\beta_n)\sin n\theta}{n^2}$$

是线性的. 由于级数为一致收敛，所以和函数为有界；因此如同证明定理 97 那样，可知对一切 n，$a_n=\alpha_n$，$b_n=\beta_n$.

7.8 更一般的情形 这一章的主要目的是证明定理100. 在结束之前，我们再讨论一下它的许多拓广.

拓广主要有三个方面（当然可以自然地统一起来）：(a) 拓广积分概念，(b)拓广例外集 E，(c) 拓广收敛性假设. 对积分定义加以必要的限制，(a)型的拓广将没有特殊的困难，这里不准备详细讨论它.

(b)型的拓广比较困难. 集合 E 称为"唯一性集"是指不存在不恒为 0 的但除 E 外处处收敛于 0 的三角级数：于是，任一可列集均为唯一性集. 这种唯一性集的结构特征至今还没有弄清楚. 已经知道有些完备集，例如Cantor集以及相类似的集都是唯一性集. 但是，并非所有的零集都是唯一性集，因为存在着不恒为 0 的三角级数，几乎处处收敛于 0.

(c)型的某些拓广是容易的（实质上已包含在上面所讨论的情况中）. 例如我们可以把定理100 中的收敛性条件换做"a_n 及 b_n 趋于 0，且除 E 外(R)可和于 f". 其它的推广只需要在证明中略加改变即可：例如我们可以证明，当 $T(\theta)$ 的上、下和函数 $\bar{f}$ 与 $\underline{f}$ 均为可积，且除集 E 外均为有限时，$T(\theta)$ 必为一 Fourier 级数.

然而我们最感兴趣的却是第 V 章中级数的求和法问题. 这些问题更加困难，因为有很简单的例子可以说明问题的解答是相当复杂的. 例如级数

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots \tag{7.8.1}$$

除 $\theta=0$ 外在 $\langle -\pi, \pi \rangle$ 内都是(C, 1)可求和于 0，而级数

(7.8.2) $$\sin\theta+2\sin 2\theta+3\sin 3\theta+\cdots$$

对于一切 θ 都是(A)可求和于 0 的*⁾.

我们现在只能提到一二个特殊令人注目的定理. Verblunsky 曾证明：假若 a_n 与 b_n 为 $o(n)$，且 $T(\theta)$ 对一切 θ 均为(A)可求和于 0，那末一切 $a_n=b_n=0$. 特别，假若 $T(\theta)$ 为(C, 1)可和，那末 a_n 与 b_n 必为 $o(n)$，从而，对一切 θ 均可(C, 1)求和于 0 的三角级数必恒等于 0. 例(7.8.1)表明，这定理中不能允许存在即使是一点的例外集. 假若有有限多个例外点 ξ，那末 $T(\theta)$ 将是有限个形如 $\frac{1}{2}+\Sigma\cos n(\theta-\xi)$ 的"奇异级数"的线性组合. 有关这方面的结果最近已由 Wolf 所拓广. 他已经解决了可以用任意阶 Cesàro 求和的级数问题；但是对于 A-求和法的问题，一直到现在还没有完全解决.

*⁾ 因为对一切 θ，

$$r\sin\theta+2r^2\sin 2\theta+\cdots=\frac{r(1-r^2)\sin\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}\to 0.$$

附　录

我们用下面的缩写表示书和杂志:

H1, H2: E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable(第一册,第三版, Cambridge, 1927;第二册,第二版, Cambridge, 1926).

KS: S. Kaczmarz 和 H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen(Warsaw, 1935).

T: E. C. Titchmarsh, The theory of functions (第二版, Oxford, 1939).

Z: A. Zygmund, Trigonometrical series (Warsaw, 1935).

AM: Acta Math.; CR: Comptes Rendus (Paris); FM: Fundamenta Math.; JLMS: Journal London Math. Soc.; MA: Math. Annalen; MZ: Math. Zeitschrift; PLMS: Proc. London Math. Soc. (2).

三角级数论的其它的书是 H. S. Carslaw, Introduction to the theory of Fourier's series and integrals (第三版, London, 1930); H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques (Paris, 1906); W. Rogosinski, Fouriersche Reihen (Leipzig, 1930); L. Tonelli, Serie trigonometriche (Bologna, 1928); J. Wolff, Fourier'sche Reihen (Groningen, 1931). 还有三篇综合性的重要著作,它们是: H. Burkhardt (II A 12)及 E. Hilb 和 M. Riesz(II C 10) 在 Encykl. d. Math. Wiss 的文章, 以及 A. Plessner (I 3, 1325) 在 Pascal's Repertorium d. höheren Analysis 的文章. 特别, Burkhardt 的文章包含着有关三角级数的早期历史的大量知识.

第 I 章

我们在本章中所引用的几乎都在 T 中,但是我们加上一些补充的参考材料. 所讲的定理在形式上不完全与原来的相同,但读者不难作某些必要的修正.

§1.4. Fubini 定理在下列各书中都有证明: H1, 629; Kestelman, Modern theories of integration (Oxford, 1937), 205; Saks, Theory of the integral (第二版, Warsaw, 1937), 76; de la Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue(第二版, Paris, 1934), 54. T, 390 只证明了一个特殊情形. Egoroff 定理 (i) 及 Fatou 的引理可在 T 的 339 及 346 页中找到. Egoroff 定理 (ii)

可以类似地加以证明，用到 Lusin 定理(H2, 144)和考察到下列事实：假如 $f_h(x)$ 和 $f(x)$ 在 E 内连续，那末 E 中的一切 x 使当 $|h|\leqslant H$ 时

$$|f_h(x)-f(x)|\leqslant\eta$$

的全体记作 $E_{\eta,H}$ 时，$E_{\eta,H}$ 在 E 内是闭的．关于 Stieltjes 积分可参考 H1, 538, 662 或者 Widder, The Laplace transform (Princeton, 1941)，第一章．

§1.5．在 Hardy, Littlewood 和 Pólya 的 Inequalities (Cambridge, 1934) 的第二章和第六章中，关于 Hölder 和 Minkowski 的不等式有很详尽的讨论．

§§1.6～1.7．关于定理 1，可参考 T, 376; H1, 632($p=1, 2$); H2, 250. 关于定理 2, T, 386, 397(习题 17); H2, 254．关于定理 3, T, 397(习题18); H1, 636, 639 ($p=1, 2$); H2, 231; Z, 17 ($p=1$), 85．

§§1.9～1.11．关于这一切参考 KS(直交化, 61)．

第 II 章

§2.1．定理 11 是"Bessel 不等式"．

§2.2．Riesz-Fischer 定理是由 E. Fischer 和 F. Riesz 在 1909 年独立证明的．在 Quarterly J. of Math., 44(1913), 49 上登载着 W. H. 和 G. C. Young 的一篇关于这个定理的有趣的历史性和评论性的文章．

§2.3．Parseval 是第一个数学家(于 1799 年)将 $\sum p_nq_n$ 表示成含有函数 $\sum p_ne^{ni\theta}$ 和 $\sum q_ne^{ni\theta}$ 的积分的公式，他的名字一般地与具有这种性质的定理联系着．

§2.4．Mercer, Phil. Trans. Roy. Soc. (A), 211 (1912), 111 (124)．

§2.5．定理 18 的证明在 KS, 200 中．

§2.9．亦可见 §5.11．有许多 Weierstrass 定理的直接证明，其中最精致的是 S. Bernstein 的证明．见 H2, 228, 459; Pólya 和 Szegö, Aufgaben aus der Analysis (Berlin, 1925), I, 65, 66, 227, 230; Widder(见 §1.4), 152.

类似于 Parseval 和 Riesz-Fischer 定理，在 L^p 中有着重要的相似的定理．对于 $r>1$，记

$$S_r(c)=\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^r\right)^{1/r},\quad J_r(f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^r d\theta\right)^{1/r},$$

并且假设 $1<p\leqslant 2$．则 W. H. Young 和 Hausdorff $\left(\text{前者对 } p=2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \cdots, \text{后者对一般的 } p\right)$ 证明了下面两个定理：(i) 假如 $f\in L^p$ 和 $f\sim(c_n)$，则

$$S_{p'}(c) \leqslant J_p(f);$$

(ii)假如 $S_p(c)$ 为有限，那末有 $L^{p'}$ 中的函数 f 以 c_n 为 Fourier 系数且

$$J_{p'}(f) \leqslant S_p(c).$$

$p \leqslant 2$ 的限制是本质的. 这些定理被 F. Riesz 扩充到任意的一致有界的直交级数.

Hardy 和 Littlewood 证明了具有同样的一般性质的一系列的定理，但含有形如 $\sum |n|^{p-2}|c_n|^p$ 的和以及相似的积分；并且这些定理被 Paley 扩充到任意的直交级数. 所有这一切见 Z，第九章和 KS，第六章.

存在着将 Parseval 定理扩充到共轭函数类函数 f 和 F 上的(如 f 属于 L，F 属于 V)许多定理. 其中最值得注意的是 M. Riesz 定理，即(2.3.1)当 f 属于 L^p 和 F 属于 $L^{p'}$ 时是成立的. 见 § 6.8 的附注.

第 III 章

§ 3.2. "Riemann-Lebesgue" 定理由 Riemann 就 "Riemann 可积函数" 加以证明，而 Lebesgue 将它扩充到 L 函数.

§ 3.3. (i) 中的定理是属于 Carathéodory 的，MA，64 (1907)，95. (ii) 中的定理是独立地由 Dieudonné，CR，192 (1931)，79 和 Rogosinski，Jahresberichte d. Deutschen Math. Ver.，40 (1931)，33 所证明. 对于一切单叶函数 $F(z)=z+C_2z^2+\cdots$ 是否是 $|C_n| \leqslant n$ 迄今不明.

§ 3.4. 假如 f 在 $\langle -\pi, \pi \rangle$ 上是解析的和正则的，那末存在着正数 δ，使 $c_n = O(e^{-\delta|n|})$；这个条件也是充分的.

§ 3.5. 定理 41 首先由 F. Riesz 证明（他的例子和这儿的完全不同），MZ，2(1918)，312. 此地的证明是属于 Hille 和 Tamarkine，Amer. Math. Monthly，36 (1929)，255. 也可参考 Z，293.

述而不证的定理是 N. Wiener 的定理，Massachusetts J. of Math.，3 (1924)，72；见 Z，221. 容易推导出两个关于 Fourier 级数的绝对收敛的有趣的定理，它们分别属于 S. Bernstein 和 Zygmund：(a) f 的 Fourier 级数当 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$，$\alpha > \frac{1}{2}$ 时为绝对收敛；(b) 假如 $f \in V$ 并且对于某个 $\alpha > 0$，$f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$，则 f 的 Fourier 级数绝对收敛；这里 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ 表示满足

$$|f(\theta+h)-f(\theta)| \leqslant H|h|^{\alpha}$$

的函数 f 所属之类. 有关这方面见 Z，第六章.

§ 3.8. 更一般的，一个 Fourier 级数可以乘以 V 中的任何函数后逐项

积分．参考 W. H. Young, PLMS, 9 (1911), 449; Hardy, Messenger of Math., 51 (1922), 186; H2, 581; 和 Z, 91.

§3.10．定理46的证明的思想是由 Zygmund 提出的．定理47和48属于 W. H. Young, PLMS, 12 (1913), 41．定理47的证明可以改为去证明：当 $A<\infty$ 时 C 和 S 二者均为控制收敛；这个条件也是使其中任一个为控制收敛所必须的．此时 C 和 S 也以指数为1地强收敛，即

$$C_n(\theta)\to f(\theta)\,(L) \text{ 和 } S_n(\theta)\to g(\theta)\,(L).$$

如 λ_n 是凸的，那末使 C 强收敛（指数为1）的必要充分条件是 $\lambda_n \log n\to 0$；参考 Z, 110．如 λ_n 是凸的并且 $A<\infty$，则 $f(\theta)\log^+|f(\theta)|\in L$.

§3.11．定理49的一部分属于 Chaundy 和 Jolliffe, PLMS, 15(1916), 214 而一部分属于 Jolliffe, Proc. Camb. Phil. Soc., 19(1921)．在 T 和 Z 中定理没有被叙述完整，见 T, 6 和 Z, 108.

更一般的说，$g(\theta)\to\frac{1}{2}\pi A$ 等价于 $n\lambda_n\to A$，但证明较困难．见 Hardy, PLMS, 32(1931), 441; Hardy 和 Rogosinski, JLMS, 18(1943), 50.

§3.12．特殊级数 S 的部分和 $s_n(\theta)$ 曾被 Gronwall, D. Jackson, Landau 等人彻底研究过；在文献 Z 中应添加 Gronwall, MA, 72 (1912), 228.

关于 Gibbs 现象的其它定理将于 §§4.5, 5.7 和 6.7 中找到，图解讨论见 Bromwich, Infinite series (第二版, Cambridge, 1926), 382 和 Carslaw, I, 第九章．关于 G 的正确数值见 Szász, Duke Math. J., 11 (1944), 824.

"Gibbs 现象"一语的意义是十分明确的，但在实质意义上 Gibbs 有前驱者 Wilbraham (1848)和 du Bois-Reymond (1874)．Wilbraham 和 du Bois-Reymond 两人都不十分正确，首先对此现象给出一般的和科学的讨论的是 Bôcher (1906)．见 Carslaw, Bull. Amer. Math. Soc., 31 (1925), 420.

第 IV 章

§4.3．关于这里引证的 Lebesgue 定理见 H1, 637; T, 362.

§4.6．Gergen, Quarterly J. of Math. (牛津), 1 (1930), 252．在 Z 中这个定理没有被完整地叙述．存在着更一般的形式，其中(4.6.1)由

$$\lim_{a\to 0}\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{ah}^{\delta}\frac{|\phi(t+h)-\phi(t)|}{t}\,dt=0$$

所代替．为此见 Gergen, 同上，和 Pollard, JLMS, 2(1927), 255.

条件(4.6.5)含有(4.6.1)，当 $t^{-1}g_c(t)\in L$ 时(4.6.5)一定满足，因此显然可知，Lebesgue 的判别法包含着 Dini 的判别法.

尚有两个其它的有名的判别法，就是：

(i) de la Vallée-Poussin 判别法(V)：假如

$$\chi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \phi(u)du \in V(0, \pi),$$

则级数收敛于 $\chi(+0)$；

(ii) Young 判别法(Y)：假如 f 满足 l_c，而 $ug_c(u)$ 在 $(0, t)$ 上的变差为 $O(t)$，则级数收敛于 c。

判别法(V)包含着 Dini 判别法(D)和 Jordan 判别法(J)，但是含在 Lebesgue 判别法(L)之中；Y 法含有 J 但不含有 D，且含于 Pollard-Gergen 拓广的 L 之中；V 的狭义形式其中以 o 代替 O，是含在 L 之中的。这个形式与 Lebesgue, MA, 61 (1905), 251(声明 6, 257)所给出的是等价的。du Bois-Reymond 在 1881 年给出的一个判别法(虽然是由较老的积分论的术语叙述的)也可看作实质上与 V 等价；见 Brodén, MA, 52 (1899), 177 (213)。关于这些判别法间的逻辑关系见 Hardy, Messenger of Math., 47 (1918), 149; H2, 533; Z, 36。

最近 Hardy 和 Littlewood 给出一个不同类型的判别法：假如

$$\frac{1}{t}\int_0^t |g_c|dt=o\left\{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1}\right\}$$

并且存在某个正数 δ，使 $a_n=O(n^{-\delta})$，$b_n=O(n^{-\delta})$，则级数收敛于 c。见 Hardy 和 Littlewood, JLMS, 7(1932), 252 及 Annali d. R. Scuola Norm. Sup. d. Pisa (2), 3 (1934), 42; Fu Traing Wang (王福春), PLMS, 47 (1942), 308 和 JLMS, 17 (1942), 98; Z, 34。

Marcinkiewicz, JLMS, 10 (1935), 264 证明了：假如对于一个正测度的点集 E 中的一切 θ，

$$\frac{1}{t}\int_0^t |f(\theta+u)-f(\theta)|du=O\left\{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1}\right\},$$

则 $T(f)$ 几乎处处在 E 中收敛。

§4.7. 定理59包含关于一致收敛的"Dini-Lipschitz 判别法"。(4.7.1)中的 o 不能改为 O，在这个意义下这个条件是"最佳可能的"；见 Z, 30, 173。关于点判别法的不充分性见上述 Hardy 和 Littlewood 的第二篇文章和 Z, 174。

§4.10. 本节中的大部分结果实质上是属于 W. H. Young, Münchener Sitzungsberichte, 41 (1911), 361。关于共轭级数的"Dini 判别法"是由 Pringsheim 较早给出的。

易由定理 63 推得级数 $\sum n^{-1}a_n$ 收敛的一个必要充分条件：$\sum n^{-1}a_n$ 收敛且成立着

$$a_0 \log 2+\sum_1^{\infty} n^{-1}a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cot\frac{1}{2}\theta\left\{\int_{-\theta}^{\theta} f(t)dt\right\}d\theta$$

的必要充分条件是最后一个积分存在(作为一个 Cauchy 积分)．它由Hardy 和 Littlewood, MZ, 19 (1923), 67(94)所证明，不很简单．

§4.11. 定理 64：(4.11.1) 的证明见 Lebesgue, Ann. de Toulouse (3), 1 (1909), 25 (116)，而(4.11.2)的证明见 Lukács, J. für Math., 150(1920), 107.

§4.12. 定理 65 首先由 du Bois-Reymond 证明，但例子是属于 Schwarz 的；见 H2, 545. Faber 和 Fejér 还给出其它的非常精致的构造，其中 Fejér 的更为人所周知：见 H2, 541; T, 416; Z, 第八章，从中还可以找到其它的参考文献．Schwarz 的例子有其优点，因为 f 是由图形表示的．

类似的构造提供了具有下述性质的连续函数的例子：(a) 其 Fourier 级数在一个可列的到处稠密的集上发散，(b) 其 Fourier 级数处处收敛，但在任一区间上不一致收敛．一个连续函数(或者甚至 L^2 中的一个函数)的 Fourier 级数究竟是否可以在一个正测度集上发散的问题至今没有解决*)．

§4.13. 实质上属于 Lebesgue(同 §4.11 所述)．

§4.14. Lebesgue 常数曾由 Fejér, Gronwall, Hardy, Szegö 和 Watson 详尽地研究过．参考 Hardy, JLMS, 17 (1942), 4.

第 V 章

§5.2. 我们只需要 Toeplitz 条件的充分性，在 Z, 40 中有证明．完全的证明见 Dienes, The Taylor series (Oxford, 1931)，第十二章．

§5.3. (C, 1)求和法是(C, k)求和法中最简单的，(C, k)求和法对于整数 k 是 Cesàro 所定义的，而对于一切大于 -1 的 k 是由 Chapman 和 Knopp 所定义的．有关这种求和法的一般的说明可参考 Borel, Leçons sur les séries divergentes(第二版, Paris, 1928)，第六章；Dienes，同上，第十二章；H2，第一章；和 Knopp, Unendliche Reihen (第二版, Berlin, 1924; 英文译本, Glasgow, 1928)，第十三章．(C, k)求和法当 $k\geq 0$ 时为正则；当 $k'>k$ 时，(C, k)求和法包含(C, k')求和法；对于任意的 k，(C, k)求和法包含(A)求和法．

---

*) 这个问题已为 L. Carleson 所解决，答案是否定的，请参看他的论文：L. Carleson, On convergence and growth of partialsums of fourier series, Acta Math., 116 (1966), 135～157.——译者注

§§ 5.4～6. 要列出详细地讨论定理70至72的文献是困难的，我们的处理有几点是新奇的；但是最本质的思想是属于 Lebesgue 的(同 § 4.11 所述)．见 H2，第七章和 Z，第三章的文献．

定理 70 (iv) 的结果对于 (C, 1) 求和法和(A)求和法(以 $H=1$) 是成立的．对 L^p 中的函数有改进的定理．例如当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时，

$$\mathrm{M}_p\{\sigma_n(\theta)\}\leqslant\mathrm{M}_p\{f(\theta)\},$$

而当 $1\leqslant p<\infty$ 时 $\sigma_n(\theta)\to f(\theta)\,(L^p)$：见 Z，第四章，那里还考虑了更一般的函数类．Hardy 和 Littlewood, AM 54(1930) 曾经证明当 $1<p<\infty$时 $|\sigma_n(\theta)|^p$ 被 L^p 中的一个函数所控制．但当 $p=1$ 和 $p=\infty$ 时这是不成立的．所有这一切，对一般的(C, k)求和法都有相应的结果．

§ 5.7. 定理 73 的结果作了一定的改变以后对于 (C, k) 求和法($k>0$)也是正确的．当 $k>1$ 时(C, k)求和法象(A)求和法一样也满足定理 71 的条件，所以，只要 f 满足 l_c，级数可以用(C, k)求和法求和．假如

$$\int_0^t (t-u)^{r-1}g_c(u)du=o(t^r), \tag{1}$$

我们就说 $\phi(t)\to c(\mathrm{C},\ r)$；因此"$\phi(t)\to c(\mathrm{C},\ 1)$"表示 f 满足 l_c．有着一系列的定理讨论这种广义连续性和不同阶的 Cesàro 求和之间的关系，例如，$k>r$ 时，连续性(C, r) 含有 (C, k) 可和性，而当 $r>k+1$ 时 (C, k) 可和性含有连续性(C, r)．特别，Fourier 级数对于某个 k 为(C, k)可和的必要充分条件是存在某个 r 使得(1)成立．假如靠近 θ，f 是有界的或者是正的，那末一切正数级的 (C, k) 求和法都是等价的，而 l_c 是对于可和性的必要充分条件．见 Hardy 和 Littlewood, MZ, 19 (1903), 67 及 JLMS, 1(1926), 134, 及 Z，第十章，那里有更完整的报导和参考文献．

§ 5.8. 有关共轭级数的定理的实质是属于 W. H. Young, Münchener Sitzungsberichte, 41 (1911), 361, 及 Plessner, Mitteilungen Math. Sem. Giessen, 10 (1923), 1.

我们没有讨论关于共轭级数求和的一般理论．这儿准备叙述一些主要的结果．有两个"共轭核"(这可由 §§ 5.8 和 5.10 的分析中得到)，它们是：

$$\widetilde{K}_m(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\widetilde{D}_n(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta},$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_m(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta},$$

而对应于(5.4.5)的方程是

$$\int_0^\pi \tilde{K}_m(t)dt=\sum_1^\infty a_{m,n}\log 2n+\gamma+o(1)=l_m+\gamma+o(1).$$

对应于(5.5.1)的条件是

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/m}|\tilde{K}_m(t)|dt\leqslant H,\quad \frac{2}{\pi}\int_{\pi/m}^{\pi}|\tilde{\mathbf{K}}_m(t)|dt\leqslant H;$$

又假如以 $\tilde{\tau}_m(\theta)$ 表示 $\tilde{s}_n(\theta)$ 的第 m 个变换，那末对应于定理 70 的主要结论如下：

(a) 假如极限 $\psi(+0)=\lim\limits_{t\to 0}\{f(\theta+t)-f(\theta-t)\}=d$ 存在，则

$$\tilde{\delta}_m(\theta)=\tilde{\tau}_m(\theta)-r_m\tilde{f}_m(\theta)=\frac{d}{\pi}(l_m-r_m\log 2m)+d\beta+o(1).$$

(b) 假如 $f(\theta)$ 在 $\langle a,b\rangle$ 上连续，则 $\tilde{\delta}_m(\theta)\to 0$ 在 $\langle a,b\rangle$ 上一致地成立.

(c) $\tilde{\tilde{\delta}}_m(\theta)\to 0(L)$.

类似于 §§ 5.4～6，在"L^p"中有相应的结果. 至于 β，看 § 4 8 最后的注意：有时为方便计用其它的值 a.

类似于定理 71 和 72，l_c 及 L_c 必须换以 $\tilde{l}_d$ 及 $\tilde{L}_d$，而 $\tilde{K}_m$ 及 $\tilde{\mathbf{K}}_m$ 必须满足相似于 K_m 在那些定理中所满足的条件，前者是在 $(0,\pi/m)$ 上积分，而后者是在 $(\pi/m,\pi)$ 上积分.

特别在这些条件下 $\tilde{\tau}_m(\theta)\to\tilde{f}(\theta)$ 几乎处处成立；这个结果自然依赖着定理 89. (C, 1)求和法和(A)求和法分别都满足相当于定理 71 和 72 中的条件.

§ 5.9. Rogosinski, Schriften d. Königsberger Gelehrten Ges., 1926, 第三册证得(5.7.5)的推广公式，它相当于我们的(5.9.4).

§ 5.11. 关于"Tauber 型"定理看 H2, 81; T, 412; Z, 47. 假如 a_n 和 b_n 为 $O(n^{-1})$，或者是实数大于 $-Hn^{-1}$，那末对于 Fourier 级数和共轭级数，收敛问题有一个完全的解：Fourier 级数收敛于 c 当且仅当 f 满足 l_c，而共轭级数收敛于 $\tilde{f}$ 当且仅当 $\tilde{f}$ 存在. 见 Hardy 和 Littlewood, JLMS, 1 (1926), 19.

§ 5.12. Fatou; 关于进一步的发展和参考文献见 Z, 256.

第 VI 章

§ 6.2. Kolmogoroff, FM, 4 (1923), 324. 其后 Kolmogoroff 构造了一个处处发散的 Fourier 级数，见 CR, 183 (1926), 1327 和 Z, 175. 我们用了后者的主要思想来证明前者的结果.

§ 6.3. Paley, JLMS, 7 (1932), 205; Z, 265; Szász, AM, 61 (1933), 185

曾将结果扩充到$na_n>-H$, $nb_n>-H$的情形: 见 Hardy 和 Rogosinski, 同§3.11 所述.

§6.4. Kolmogoroff, FM, 5 (1924), 96. 具有$n_{\nu+1}/n_\nu\geqslant\lambda>1$的三角级数$\sum A n_\nu(\theta)$称为零系数特别多的三角级数; 定理 83 表明, 这样一个级数是 Fourier 级数的话一定几乎处处收敛. 关于零系数特别多的三角级数的其它定理见 Z, 119, 139, 215, 251.

§6.5. 定理 85 是下面的更一般的定理的特殊情形: 假如f满足l_c, 并且对于某个$r>1$, $\int_0^t|\phi-c|^r du=O(t)$, 则对一切正数$k$成立着$\sum_0^n|s_m-c|^k=o(n)$. 见 Hardy 和 Littlewood, PLMS (2), 26 (1927), 273 和 FM, 25 (1935), 162. Marcinkiewicz, JLMS, 14 (1939), 162 曾经证明, 任何 Fourier 级数是几乎处处强性可和的.

证明的其它线索见 Fejér, Proc. Camb. Phil. Soc., 34 (1938), 503.

§§6.6~7. Rogosinski 应用了这两节的思想得到很多结果, 见 MA, 95 (1925), 110; MZ, 25 (1926), 132 和 41(1936), 75. 一个特殊的结果是: 假如k为一个整数而f满足$\tilde{L}_d$, 则

$$s_m\left(\theta+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m\left(\theta-\frac{k\pi}{m}\right)\to\frac{2d}{\pi}\int_0^{k\pi}\frac{\sin t}{t}dt.$$

Hardy 和 Rogosinski, JLMS, 18 (1943), 83 举了一个例子, 说明有函数f, 它的 Gibbs 集在θ关于$\frac{1}{2}\{f(\theta+0)+f(\theta-0)\}$不是对称的.

§6.8. 定理 89 是由于 Priwaloff, 但通常利用复函数理论的证明是由于 Plessner; 见 Z, 145. 我们的证明是 Marcinkiewicz 的, 见 FM, 27 (1936), 38(55). 还有不依赖于三角级数理论的证明, 见 Besicovitch, FM, 4 (1922), 172 和 JLMS, 1 (1926), 120; 但是这个证明无疑的更为困难.

函数$\tilde{f}$不一定属于L. 可以证明, 假如$\tilde{f}\in L$, 则$\tilde{T}$是$\tilde{f}$的 Fourier 级数, 但是证明相当困难. M. Riesz 曾经证明, 假如$f\in L^p(1<p<\infty)$, 则$\tilde{f}$也属于L^p; 又 Zygmund 证明, 当$f(1+\log^+f)\in L$时$\tilde{f}\in L$. 所有这些见 Z, 第七章. 重要的推论是: 当$f\in L^p(1<p<\infty)$时$s_n\to f(L^p)$和$\tilde{s}_n\to\tilde{f}(L^p)$; 当$f(1+\log^+f)\in L$时$s_n\to f(L)$和$\tilde{s}_n\to\tilde{f}(L)$以及当$f\in L^p(1<p<\infty)$和$F\in L^{p'}$时成立着(2.3.1)(没有绝对收敛性).

最后的结果当f和$\tilde{f}$二者均属于L时成立. Hardy 和 Littlewood 曾经证明, 在这个情形下$\sum n^{-1}(|a_n|+|b_n|)<\infty$. 一个等价的结果是: 当$f$和$\tilde{f}$二者均属于 V 时$f$的 Fourier 级数绝对收敛. 见 Z, 139, 157.